

Györgyi Géza

# ELEKTRODINAMIKA II: KLASSZIKUS SUGÁRZÁSELMÉLET

Gáspár Merse Előd és Oroszlány László által készített jegyzet alapján.

2010. december

1

## Tartalomjegyzék

1. <b>Captatio benevolentiae</b>	11
2. <b>Emlékeztető elektrodinamikából</b>	12
2.1. Coulomb-törvény és szuperpozíció . . . . .	13
2.2. Nincs mágneses ponttöltés . . . . .	16
2.3. Faraday-törvény . . . . .	17
2.4. Töltésmegmaradás . . . . .	19
2.5. Biot–Savart-törvény . . . . .	20
2.6. Értelmezés . . . . .	22
2.7. Mértékinvariancia . . . . .	24
2.8. Lorentz erő . . . . .	25
2.9. A Maxwell-egyenletek összefoglalva . . . . .	25
2.10. Közegek . . . . .	26

2

2.11. Mértékegységek . . . . .	27
<b>3. Klasszikus kontinuum mechanika, téregyenletek</b>	<b>29</b>
3.1. Hamilton elv terekre . . . . .	29
3.2. Négyes jelölés . . . . .	30
3.3. Euler–Lagrange egyenletek (ELE) . . . . .	31
3.4. Megmaradási tételek, energia-impulzus tenzor . . . . .	32
3.5. Hamilton-egyenletek . . . . .	36
3.6. Rugalmas hullámok terjedése egy dimenzióban . . . . .	39
3.6.1. Húr transzverzális rezgései . . . . .	39
3.6.2. Longitudinális hullámok . . . . .	42
<b>4. Emlékeztető hidrodinamikából</b>	<b>44</b>
4.1. Koordináták . . . . .	44
4.2. Euler egyenlet . . . . .	47

4.3. Kontinuitás . . . . .	47
4.4. Impulzusmérleg . . . . .	48
4.5. Termodinamika . . . . .	49
4.6. Energiamérleg . . . . .	50
4.7. Lagrange koordináták átjelölése . . . . .	52
4.8. Kontinuitás Lagrange koordinátákkal . . . . .	53
4.9. Mozgásegyenlet Lagrange koordinátákkal . . . . .	54
<b>5. A hidrodinamika mint térelmélet (Lagrange koordinátákkal)</b>	<b>55</b>
5.1. Hamilton-elv . . . . .	55
5.2. Termodinamika . . . . .	56
5.3. Euler–Lagrange egyenletek . . . . .	57
5.4. Energia-impulzus tenzor . . . . .	59
5.5. Energiamérleg . . . . .	60

5.6.	Impulzusmérleg . . . . .	61
5.7.	Hamilton egyenletek . . . . .	61
<b>6.</b>	<b>Bevezetés a speciális relativitáselmélet kinematikájába</b>	<b>62</b>
6.1.	Inerciarendszerek, ívhossz . . . . .	62
6.2.	Lorentz transzformáció . . . . .	64
6.3.	Négyesvektorok, tenzorok . . . . .	68
6.4.	Sajátidő, idődilatáció . . . . .	70
6.5.	Lorentz kontrakció . . . . .	71
6.6.	Négyessebesség, négyesgyorsulás . . . . .	74
6.7.	Sebességek összeadása . . . . .	75
6.7.1.	Azonos irányú boostok összege . . . . .	75
6.7.2.	A sebességvektor elfordulása . . . . .	77
6.8.	Paradoxonok . . . . .	79
6.8.1.	Ikerparadoxon . . . . .	79

6.8.2.	Összekötött úrhajók . . . . .	80
6.8.3.	Űrcsata . . . . .	81
6.8.4.	Rúd-pajta . . . . .	82
6.8.5.	Rúd-lyuk . . . . .	83
<b>7.</b>	<b>Pontmechanika görbevonali koordinátákban</b>	<b>85</b>
7.1.	Nemrelativisztikus tömegpont szabad mozgása . . . . .	85
7.2.	Hamilton elv relativisztikus tömegpontra . . . . .	87
7.3.	Szabad mozgás . . . . .	92
7.4.	Vektorpotenciállal leírható részecske . . . . .	93
7.5.	Skalárpotenciál . . . . .	94
7.6.	Tenzorpotenciálok . . . . .	95
<b>8.</b>	<b>Térelmélet görbevonali koordinátákkal</b>	<b>96</b>
8.1.	Hamilton-elv . . . . .	96

8.2.	Energia-impulzus tenzor . . . . .	97
8.3.	Mérlegegyenletek . . . . .	98
8.4.	Az ideális folyadék hidrodinamikája görbevonalú koordinátarendszerben	102
8.4.1.	A Lagrange sűrűség függvény . . . . .	103
8.4.2.	Mozgásegyenletek az Euler-képben . . . . .	107
8.4.3.	A GR Euler egyenlet . . . . .	108
8.4.4.	Energia-impulzus tenzorok . . . . .	109
8.4.5.	Izotróp expanzió . . . . .	110
<b>9.</b>	<b>Az elektromágneses tér mint klasszikus térelmélet</b>	<b>115</b>
9.1.	Térerősség tenzor . . . . .	115
9.2.	Hamilton elv a potenciálokra . . . . .	117
9.3.	Hamilton-elv a térerősségekre . . . . .	119
9.3.1.	A vákuum egyenletek, mint kényszerek . . . . .	119
9.3.2.	Az anyagi egyenletek, mint kényszerek . . . . .	120

9.4.	Az energia-impulzus tenzor . . . . .	121
9.5.	Tér és anyag kölcsönhatása . . . . .	124
9.5.1.	Adott pályájú azonos töltések . . . . .	124
9.5.2.	Adott térben mozgó töltés . . . . .	125
9.5.3.	Tér és anyag kölcsönható dinamikája . . . . .	126
9.5.4.	Energia impulzus tenzor . . . . .	129
9.5.5.	Mértékinvariancia . . . . .	129
9.5.6.	Hullámegyenlet görbült téridőben . . . . .	130
<b>10.</b>	<b>Az elektromágneses tér speciális relativisztikus tulajdonságai</b>	<b>131</b>
10.1.	Kvadratikus invariánsok . . . . .	131
10.2.	A térerősségek Lorentz transzformáltja . . . . .	133
10.3.	Példák . . . . .	136
<b>11.</b>	<b>Hullámtér</b>	<b>145</b>

11.1. Komplex hullámvektor . . . . .	145
11.2. Homogén hullám energiája . . . . .	148
11.3. Impulzus . . . . .	151
11.4. Impulzusmomentum . . . . .	152
<b>12. Töltések tere</b>	<b>154</b>
12.1. Inhomogén hullámegyenlet . . . . .	154
12.2. A Green függvény módszere . . . . .	155
12.3. A sugárzási tér GF segítségével . . . . .	158
12.4. Ponttöltés tere: Liénard–Wiechert potenciálok . . . . .	159
12.5. LW terek . . . . .	162
12.6. Kovariánsan . . . . .	166
12.7. Az LW terekről . . . . .	168
<b>13. Ponttöltés sugárzása</b>	<b>172</b>

13.1. Kisugárzott teljesítmény . . . . .	172
13.2. Sugárzási visszahatás . . . . .	182
13.3. Természetes vonalszélesség . . . . .	183
13.4. Öngyorsítás . . . . .	184
13.5. Dirac-féle mozgásegyenlet . . . . .	185
13.6. Cserenkov sugárzás . . . . .	187
<b>14. Ponttöltések kölcsönhatása</b>	<b>192</b>
14.1. Effektív hatás . . . . .	192
14.2. Paradoxon . . . . .	193
14.3. A Coulomb kölcsönhatás első relativisztikus korrekciója: Breit–Darwin formula . . . . .	195
14.4. Paradoxon? . . . . .	199

## 1. Captatio benevolentiae

Hagyománytiszteletből őriztük meg a fél évszázada előadott „Klasszikus sugárzáselmélet” kurzus címét. A hangsúly most kettős, először bevezetést adunk a klasszikus térelméletbe, majd rövidebben foglalkozunk elektrodinamikai jelenségekkel.

Az előadáshoz kapcsolódik a „A klasszikus térelmélet elemei” hallgatói szeminárium. Ennek célja egyrészt a matematikai alapozás, nagyobb részben pedig az előadáson bemutatott térelméleti formalizmus fizikai alkalmazása.

A források között kiemelendő Landau–Lifsic: Elméleti fizika II, Jackson: Classical Electrodynamics, Marx György: Klasszikus sugárzáselmélet (egyetemi jegyzet), Abonyi Iván kézzel írt jegyzete azonos című kurzusáról, valamint Dávid Gyulával folytatott diszkussziók a relativisztikus pontmechanika és hidrodinamika tárgykörében.

11

## 2. Emlékeztető elektrodinamikából

Tekintettel arra, hogy az Elektrodinamika I kurzus óta egy nyár telt el, az első órán felidézzük a Maxwell egyenleteket (ME).

Levezethetők-e a ME már a középiskolában megismert, XIX. szd-i kísérleti eredményekből? Az alábbi tapasztalati törvényekből kiindulva megmutatjuk, hogy a ME megkapathatók, majd értelmezzük az eredményt.

- Coulomb törvény
- szuperpozíció elve
- nincs mágneses monopólus
- Faraday törvény
- Biot–Savart törvény
- töltésmegmaradás

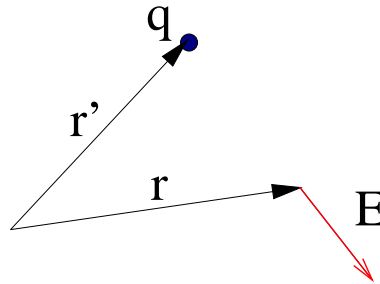
12

## 2.1. Coulomb-törvény és szuperpozíció

A Coulomb törvény szerint egy ponttöltés tere az  $\mathbf{r}$  helyen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -q \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'), \quad (2.1)$$

ahol  $q$  a töltés nagysága és  $\mathbf{r}'$  a helyvektora.



1. ábra. A Coulomb törvényhez.

**2.1. Gyakorló feladat.** *Javasoljunk kísérletet, amellyel nagy pontossággal igazolható az  $1/r^2$ -es erőtvény.*

13

Bevezetve a

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.2)$$

potenciált,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi. \quad (2.3)$$

Vizsgáljuk a Laplace operátor hatását az  $1/r$ -re. Az origón kívül

$$\Delta \frac{1}{r} = -\nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \frac{3\mathbf{r}}{r^5} = 0 \quad / \mathbf{r} \neq \mathbf{0} /. \quad (2.4)$$

**2.2. Gyakorló feladat.** *Mutassuk meg  $d$  dimenzióban csak a rádiustól függő  $f(r)$  függvényre*

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) = r^{1-d} (r^{d-1} f'(r))'. \quad (2.5)$$

Az origó körüli  $\epsilon$  sugarú gömbre

$$\int_{\epsilon \geq r} \Delta \frac{1}{r} d^3r \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\epsilon=r} \nabla \frac{1}{r} d\mathbf{A} = - \int \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{r} r d\Omega = -4\pi. \quad (2.6)$$

Mivel az integrandus az origón kívül eltűnik, tetszőleges, az origót magában foglaló térfogatra ugyanezt az eredményt kapjuk. Az olyan „függvény”-t, amely zérus egy ponton kívül, viszont a pontot magában foglaló tetszőleges térfogatra egységnyi az integrálja,

14

Dirac deltának nevezzük, ezért

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.7)$$

A Dirac delta valójában integráloperátor, amelyet egy dimenzióban a következő kifejezéssel definiálhatunk

$$\int_a^b f(x')\delta(x' - x)dx' = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \notin [a, b], \\ f(x) & \text{ha } x \in (a, b). \end{cases} \quad (2.8)$$

**2.1. Házi feladat.** *Mutassuk meg, hogy ha valamely sima  $g(x)$  függvényre  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ , akkor  $\varepsilon > 0$  mellett  $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  az  $\varepsilon \rightarrow 0$  limeszben a Dirac deltát adja, a  $g(x)$  konkrét alakjától függetlenül. Számítsuk ki a (2.8) integrál értékét az  $\varepsilon \rightarrow 0$  limeszben, ha  $x = a$  ill.  $b$ . Az eredmény már függ a  $g(x)$  választásától (10%).*

A  $d$  dimenziós Dirac delta

$$\delta(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \delta(x_i). \quad (2.9)$$

A ponttöltés terének divergenciája tehát

$$\nabla \mathbf{E} = -\Delta \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi q \underbrace{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}_{\varrho(\mathbf{r})}, \quad (2.10)$$

ahol bevezettük  $\varrho(\mathbf{r})$ -t, a ponttöltés töltéssűrűségét. Több ponttöltésre kiterjesztve

$$\varrho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2.11)$$

A tapasztalat szerint töltések terei összeadódnak, ez a **szuperpozíció elve**. Ezért írhatjuk

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\varrho \quad (\text{I. anyagi ME}), \quad (2.12)$$

és a potenciál

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (2.13)$$



## 2.2. Nincs mágneses ponttöltés

Mágneses ponttöltést — egyelőre — kísérletileg nem találtak, ezért a Gauss-tétel alapján

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (2.14)$$

Ez az I. vákuumbeli ME.

## 2.3. Faraday-törvény

Az  $A$  irányított felületen átmenő mágneses fluxus

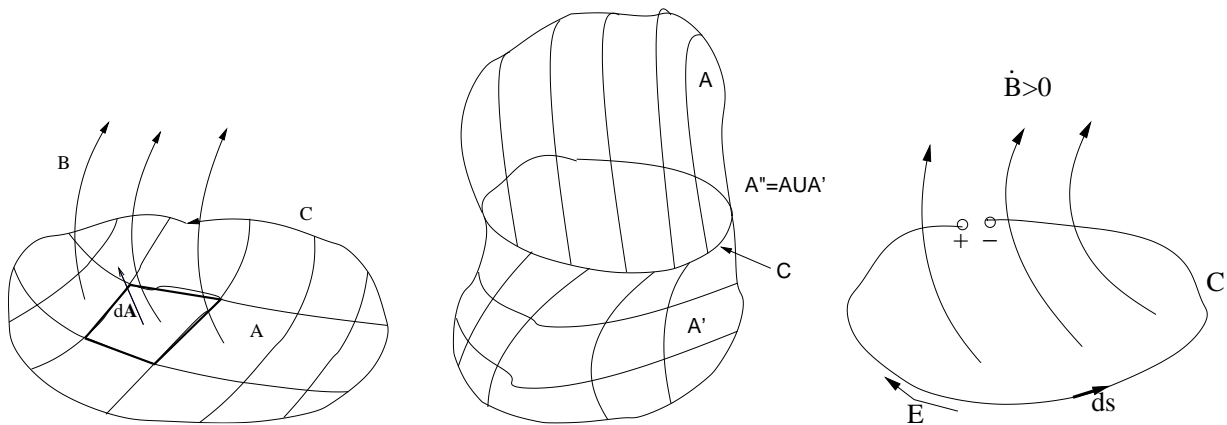
$$\Phi = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A}. \quad (2.15)$$

Ez csak az  $A$  határvonalától,  $C = \partial A$ -től függ, ugyanis

$$\Phi' = \int_{A'} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} - \int_{A''} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \Phi - \underbrace{\int_V \nabla \mathbf{B} dV}_0 = \Phi, \quad (2.16)$$

ahol  $C = \partial A' = \partial A$  és  $A'' = A \cup A'$ .

17



2. ábra. A bal és középső ábra a fluxusok azonosságát, a jobboldali a Faraday törvényt illusztrálja. A  $C$  kontúr rögzített, a  $ds$  vonalelem és a felület a jobbkézsabály szerint irányítottak.

Faraday kísérleti törvénye

$$U = -\frac{1}{c} \dot{\Phi} \quad (2.17)$$

18

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \int_C \mathbf{E} \, ds \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_A \nabla \times \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \\ &= -\frac{1}{c} \dot{\Phi} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mivel ez minden felületre teljesül, azért

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

ez a II. vákuumbeli ME.

## 2.4. Töltésmegmaradás

Számítsuk ki a töltéssűrűség időderiváltját

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = - \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (2.20)$$

Bevezetve a  $\mathbf{j}$  áramsűrűséget

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (2.21)$$

19

írhatjuk

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\mathbf{r}, t) = -\nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (2.22)$$

Innen

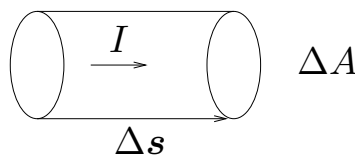
$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0, \quad (2.23)$$

ez a kontinuitási egyenlet. Ha most felírjuk egy adott térfogtból kifolyó teljes áramot,

$$I = -\dot{Q} = -\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, d^3r = - \int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} \, d^3r = \int_V \nabla \mathbf{j} \, d^3r \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A}, \quad (2.24)$$

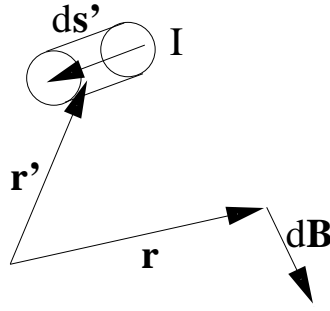
akkor kiviláglik, hogy  $\mathbf{j}$  felületi áramsűrűség. A 3. ábráról látszik, hogy

$$I \Delta s = \mathbf{j} \Delta V. \quad (2.25)$$



3. ábra. Az áramsűrűség jelentése elemi vezető esetére.

## 2.5. Biot–Savart-törvény



4. ábra. A Biot-Savart törvényhez.

Egy  $ds'$  elemi vezető, melynek helyvektora  $\mathbf{r}'$  és  $I$  erősségű áram folyik benne, az  $\mathbf{r}$  pontban  $d\mathbf{B}$  infinitezimális indukciós teret kelt a Biot–Savart törvény szerint

$$d\mathbf{B} = \frac{I ds' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' = \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (2.26)$$

$$\uparrow$$

$$-\mathbf{a} \times \nabla \psi(\mathbf{r}) = \nabla \times (\mathbf{a} \psi(\mathbf{r}))$$

21

Ennek alapján

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (2.27)$$

Ebből az I. vákuum ME következik. Vektoranalitikai azonosság szerint

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \quad (2.28)$$

Feltéve, hogy a vizsgált térfogat a teret keltő áramokat magában foglalja, a határon ezek zérusak

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \nabla \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \stackrel{\substack{\text{parc.int.} \\ +\text{Gauss tétel}}}{=} \frac{1}{c} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{1}{c} \nabla \int \frac{\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

továbbá (2.7) felhasználásával

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \Delta \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (\text{II. anyagi ME.}) \quad (2.31)$$

22

## 2.6. Értelmezés

Levezettük-e ezzel a ME-t?

A felhasznált törvények csupán lassú töltésekre érvényesek. Gyors töltésekre a kiinduló egyenletek nem állnak fenn, hiszen például a Coulomb törvény helyett, mint ma már tudjuk, a Liénard–Wiechert potenciál érvényes. Viszont kísérletek azt mutatták, hogy a csak kis sebességekre igaz törvényekből kiindulva levezetett téregyenletek gyorsan változó terekre is fennállnak!

Példaként említjük, hogy a ME-ek alapján gyorsan változó terekre  $\mathbf{E}$  nem áll elő valamely potenciál gradienseként, ugyanis

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.32)$$

általánosan igaz, azonban a II. vákuumbeli ME-be helyettesítve

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.33)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \quad (2.34)$$

23

tehát nem  $\mathbf{E}$ , hanem a fenti kombináció áll elő potenciál gradienseként. Lassan változó  $\mathbf{A}$  esetén azonban valóban visszakapjuk a Coulomb-törvényt.

A meglepő az, hogy a lassú terekre érvényes törvények eredeti formájukban érvényüket veszítik, de a ME alakjában változatlanul kiterjeszthetőnek bizonyultak gyors töltésekre is.

## 2.7. Mértékinvariancia

Mértéktranszformáció:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} + \nabla \chi \longrightarrow \mathbf{A} \\ \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \longrightarrow \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B} \text{ változatlan} \quad (2.35)$$

Megfelelő  $\chi$  választással különféle feltételek teljesíthetők a potenciálokra, miközben  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  invariáns. Két gyakran használt mérték:

- Coulomb mérték

$$\nabla \mathbf{A} = 0 \quad (2.36)$$

24

ekkor a "sztatikus"  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  potenciálformula fennmarad, de  $\mathbf{E}$ -t a (2.34) alapján állítjuk elő

- Lorentz mérték

$$\nabla\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad (2.37)$$

a potenciál nem "sztatikus",  $\Delta\varphi - c^{-2}\partial^2\varphi/\partial t^2 = -4\pi\rho$ .

## 2.8. Lorentz erő

A Lorentz erő formulája

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \quad (2.38)$$

Ezt tekinthetjük erőtvénynak, de felfoghatjuk a terek mérési utasításaként is.

## 2.9. A Maxwell-egyenletek összefoglalva

I. anyagi

$$\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.39)$$

25

I. vákuum

$$\nabla\mathbf{B} = 0, \quad (2.40)$$

II. vákuum

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (2.41)$$

II. anyagi

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (2.42)$$

## 2.10. Közegek

Bontsuk szét a töltés- és áramsűrűséget két részre. Ez lehet önkényes, célszerű azonban így megkülönböztetni a közegekben polarizációval keltett  $\rho_{\text{int}}$  ill. a közvetlenül figyelemmel kísért  $\rho_{\text{ext}}$  töltéseket és a megfelelő áramokat

$$\rho = \rho_{\text{int}} + \rho_{\text{ext}}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{int}} + \mathbf{j}_{\text{ext}}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial\rho_{\text{int/ext}}}{\partial t} + \nabla\mathbf{j}_{\text{int/ext}} = 0. \quad (2.45)$$

26

Vezessük be a  $\mathbf{D}$  és  $\mathbf{H}$  mennyiségeket

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{D} &= 4\pi \rho_{\text{ext}} \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}},\end{aligned}\tag{2.46}$$

és a polarizációt jellemző  $\mathbf{P}$  és  $\mathbf{M}$  vektorokat

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, & \nabla \mathbf{P} &= -\rho_{\text{int}} \\ \Rightarrow \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, & \nabla \times \mathbf{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} &= \frac{1}{c} \mathbf{j}_{\text{int}}\end{aligned}\tag{2.47}$$

- izotróp közeg

$$\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \parallel \mathbf{H}\tag{2.48}$$

- lineáris (mátrixok transzformálják a tereket egymásba)

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}\tag{2.49}$$

- lineáris és izotróp (a megfelelő terek arányosak)

$$\hat{\epsilon} = \epsilon \hat{\mathbf{1}}, \quad \hat{\mu} = \mu \hat{\mathbf{1}}\tag{2.50}$$

## 2.11. Mértékegységek

- CGS (ezt használtuk)
  - A Coulomb törvényben fellépő faktor 1, a Biot–Savart-ban  $1/c$ .
  - A ME-ben  $c$ -k és  $4\pi$ -k jelennek meg, a vákuumban  $\epsilon$  és  $\mu$  egységnyi.
  - A terek dimenziója azonos.
- SI
  - A vákuumot a dimenziós  $\epsilon_0$  és  $\mu_0$  állandók jellemzik, a Coulomb törvényben az  $1/4\pi\epsilon_0$  faktor jelenik meg, a Biot–Savart-ban  $\mu_0/4\pi$ .
  - A fénysebesség  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ .
  - Az  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  és  $\mathbf{H}$ -val felírt ME állandó faktorokat nem tartalmazznak.
  - $\dim[\mathbf{E}] = \dim[c\mathbf{B}]$ ,  $\dim[\mathbf{H}] = \dim[c\mathbf{D}]$ .

## 3. Klasszikus kontinuum mechanika, téregyenletek

### 3.1. Hamilton elv terekre

**Dinamikai változók:**  $\phi_\alpha(\mathbf{r}, t)$ , ahol  $\alpha$ -val „könyveljük” az összes teret. A kontinuum mechanikát elgondolhatjuk úgy, hogy adott  $\alpha$ -ra és az  $\mathbf{r}$  helyen a pontmechanikában szokásos módon a  $\phi_\alpha(\mathbf{r}, t)$  időfüggő trajektóriát vizsgáljuk. Azt várjuk, hogy a kontinuumban a közeli helyek trajektóriái általában egy ideig közel maradnak. Természetesen szingularitások is felléphetnek — ez a konkrét megoldásból kiderül.

Lokális térelmélet: a Lagrange függvény előáll egyszeres térintegrál alakban, amelyben az integrandus a tértől és deriváltjaitól függ. Tegyük fel, hogy legfeljebb első deriváltakat tartalmaz

$$L = \int d^3r \Lambda(\phi_\alpha, \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial r_a}, \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t}, r_a, t), \quad (3.1)$$

ahol  $\Lambda$  az ún. Lagrange sűrűségfüggvény. Ennek a pontmechanikai analógiáját a következőképpen érzékeltethetjük. Osszuk a teret kicsiny  $\Delta^3 r$  térfogatelemekre, s tegyük fel, hogy  $\Lambda$  csak a tereket tartalmazza, de hely szerinti deriváltjaikat nem. Ekkor  $\Delta L = \Lambda \Delta^3 r$  az  $\mathbf{r}$ -beli változó Lagrange függvénye. Ha első deriváltak is fellépnek,

29

akkor ezeket differenciákkal helyettesítve látjuk, hogy  $\Lambda \Delta^3 r$  a szomszédos pontokbeli helyek tereit is tartalmazza,  $L = \sum \Delta L$ -ben tehát a különböző helyek terei közötti kölcsönhatások is megjelennek — a kontinuummechanikával éppen ezt kívánjuk leírni.

A hatás

$$S = \int L dt = \int \Lambda d^3r dt \quad (3.2)$$

A **mozgásegyenlet** az  $S$  hatás extremumfeltételéből származik.

### 3.2. Négyes jelölés

„Négyes” koordináták (nem relativisztikus a mechanika, csupán a jelölés egyszerűsítése a cél)

$$r_0 = t, \quad r_a = [\mathbf{r}]_a \quad \Rightarrow \quad r_i = [(t, \mathbf{r})]_i. \quad (3.3)$$

Az  $i, j, k \dots$  indexek 0-tól 3-ig futnak, míg az  $a, b, c \dots$  indexek 1-től 3-ig. A gradiens röviden

$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial r_i}. \quad (3.4)$$

30

Ezzel a jelöléssel a hatást tömör alakba írhatjuk

$$S = \int L dt = \int d^4r \Lambda(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,i}, r_j). \quad (3.5)$$

### 3.3. Euler–Lagrange egyenletek (ELE)

A teret variáljuk:  $\phi + \delta\phi \rightarrow \phi$ , rögzített  $r_i$  koordináták mellett (az  $\mathbf{r}, t$  térkoordinátákat nem variáljuk), s ezért  $(\delta\phi_\alpha)_{,i} = \delta(\phi_{\alpha,i})$ . A hatás változása

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4r \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_\alpha} \delta\phi_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,i}} (\delta\phi_\alpha)_{,i} \right] &= \int d^4r \delta\phi_\alpha \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_\alpha} - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,i}} \right)_{,i} \right] \\ &+ \int d^3r \delta\phi_\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,0}} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \oint \delta\phi_\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,a}} dA_a. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A Gauss tételt alkalmaztuk, a 2. sorban a két tag összege a 4d térbeli zárt 3d felületre vett integrál. A kezdeti és végpontokban rögzítjük a teret, ezért az első tag zérus. Feltesszük, hogy a második tag is nulla, ez teljesül pl. akkor, ha olyan  $\phi$  terekre szorítunk, amelyek véges térrészben különböznek nullától vagy elég gyorsan csengenek le a végtelenben.

Így kapjuk a térfogati ELE-et

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_\alpha} = \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,i}} \right)_{,i} = \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,t}} \right)_{,t} + \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,a}} \right)_{,a}. \quad (3.7)$$

Az időderiváltat a szemléletesség kedvéért  $f_{,0}$  helyett  $f_{,t}$ -vel jelöltük. N.B: Ha magasabb deriváltak is fellépnek a Lagrange sűrűségfüggvényben, akkor a hatás variációjához a Gauss tételt ismételten kell alkalmazni, és emiatt az ELE-ben további tagok jelennek meg.

Funkcionál derivált: Az a függvény, amely a funkcionál megváltozásában a függvény megváltozását (variációját) szorozza az integrálban. Azaz a

$$\delta S = \int d^4r \frac{\delta S}{\delta \phi}(r_j) \delta\phi(r_j) \quad (3.8)$$

kifejezésben a funkcionál derivált  $\frac{\delta S}{\delta \phi}(r_j)$ . A fenti ELE a hatásnak az egyes terek szerinti funkcionálderiváltjai eltűnését írja elő.



### 3.4. Megmaradási tételek, energia-impulzus tenzor

Tegyük fel, hogy megoldottuk a problémát, azaz ismerjük a  $\phi_\alpha(r_i)$  fizikailag megvalósuló "pályák"-at. A pályamenti Lagrange sűrűségfüggvény

$$\Lambda(r_i) = \Lambda(\phi_\alpha(r_i), \phi_{\alpha,j}(r_i), r_i) \quad (3.9)$$

Deriváljuk  $\Lambda(r_i)$ -t (az argumentum nélküli  $\Lambda$ -val a  $\Lambda(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,j}, r_i)$ -t rövidítjük, és az alábbiakban a pályák behelyettesítése a deriválások után magától értedődik)

$$\Lambda(r_i),_i = \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_\alpha} \phi_{\alpha,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}} \phi_{\alpha,j,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i}. \quad (3.10)$$

↑

↑

[derivált  $\Lambda(r_i)$  teljes  $r_i$  függése szerint]

[derivált  $\Lambda$  explicit  $r_i$  függése szerint]

E fejezetben kivételesen megkülönböztetjük a  $\Lambda(r_i),_i$  és  $\partial\Lambda/\partial r_i$  mennyiségeket. A (3.10) jobboldalán az első tagba behelyettesítjük az ELE-t

$$\Lambda(r_i),_i = \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}} \right)_{,j} \phi_{\alpha,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}} \phi_{\alpha,j,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} = \left( \phi_{\alpha,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}} \right)_{,j} + \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i}, \quad (3.11)$$

33

ahol ", j" teljes  $r_j$  függés szerinti derivált. Bevezetjük az **energia-impulzus tenzort** (EIT)

$$T_{ij} = \phi_{\alpha,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}} - \delta_{ij} \Lambda = \begin{bmatrix} e & \mathbf{j}_e \\ -\mathbf{p} & -\mathbf{T} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Ez a  $\phi_\alpha(r_i)$  pályák behelyettesítése után csak a koordinátáktól függ,  $T_{ij}(r_k)$ , s a divergenciája a fentiek alapján

$$T_{ij,j} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} = (\omega, -\mathbf{f}). \quad (3.13)$$

A (3.12) pontmechanikai analógiája az  $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$  Lagrange függvényből kapható Hamilton függvény

$$H = \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L, \quad (3.14)$$

amelyre a megoldás behelyettesítése után kapjuk

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.15)$$

A (3.12)-ben bevezetett jelölésekkel (3.13) részletesen

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j}_e = \omega, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \text{div} \mathbf{T} = \mathbf{f}. \quad (3.16)$$

34

Tenzorra a divergencia a második indexben hat. Ezek kontinuitási egyenlet alakúak, ezért a jobboldalakat tekinthetjük "forrás"-nak, amelyek (3.13) szerint  $\Lambda$  explicit koordinátafüggésének tulajdoníthatók. Integrális mennyiségek

$$E = \int d^3r e, \quad \mathbf{P} = \int d^3r \mathbf{p}. \quad (3.17)$$

Ha  $\Lambda$  nem függ explicit az időtől (ill. helytől), akkor  $E = \text{áll.}$  (ill.  $\mathbf{P} = \text{áll.}$ ), emiatt  $e$ -t energiasűrűségnek,  $\mathbf{p}$ -t impulzussűrűségnek tekinthetjük. A mérlegegyenletek nem változnak, ha az EIT-t olyan taggal egészítjük ki, amelynek divergenciája azonosan zérus

$$T_{ij} + \Delta T_{ij} \longrightarrow T_{ij}, \quad (3.18)$$

ahol

$$\Delta T_{ij,j} = 0, \quad (3.19)$$

például, ha az  $U_{ijk}$  antiszimmetrikus két indexben,  $U_{ijk} = -U_{ikj}$ , akkor ennek egy divergenciája megfelel

$$\Delta T_{ij} = U_{ijk,k} \quad \Rightarrow \quad \Delta T_{ij,j} = U_{ijk,jk} = 0. \quad (3.20)$$

Ez azt mutatja, hogy az energia- és impulzussűrűség nem egyértelműen definiált. Ha azonban  $U$  a vizsgált térrész felületén eltűnik, akkor az integrális energia és impulzus kiegészítő tagjait felületi integrállá alakíthatva láthatjuk, hogy azok is zérusak. A teljes energia és impulzus az EIT ilyen módosításával szemben tehát invariáns.

### 3.5. Hamilton-egyenletek

Pontmechanikai analógia

$$q(t) \sim \phi_\alpha(\mathbf{r}, t) \quad \dot{q}(t) \sim \phi_{\alpha,t}(\mathbf{r}, t) \quad (3.21)$$

Vezessük be a  $\Pi_\alpha$  **kanonikus impulzussűrűséget**

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \sim \Pi_\alpha = \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,t}} \equiv \frac{\delta L}{\delta \phi_{\alpha,t}}. \quad (3.22)$$

Ebből  $\phi_{\alpha,t}$ -t kifejezve kapjuk

$$\phi_{\alpha,t}(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, \Pi_\alpha, r_i). \quad (3.23)$$

Ahol a pontmechanikában a Lagrange függvényt deriváltuk a dinamikai változó szerint,

ott most funcionális deriváltat használunk.

Emlékeztetőül: funcionál derivált a szokásos deriválás, ha

$$F[g(x)] = \int dx f(g(x)) \Rightarrow \frac{\delta F}{\delta g} = f'(g(x)), \quad (3.24)$$

ha pedig  $f$  a  $g$  deriváltját is tartalmazza, akkor a funcionális derivált kiszámításához parciális integrálást alkalmazunk (a felületi tag eltűnését feltesszük, például a határon a  $\delta g(x) = 0$  feltétellel).

$$F[g(x)] = \int dx f(g(x), g'(x)) \Rightarrow \frac{\delta F}{\delta g} = \frac{\partial f}{\partial g} - \left( \frac{\partial f}{\partial g'} \right)', \quad (3.25)$$

A pontmechanikai Legendre transzformáció analgonja

$$H = p\dot{q} - L \sim \chi = \Pi_\beta \phi_{\beta,t} - \Lambda, \quad (3.26)$$

ekkor a Hamilton függvény

$$H = \int d^3r \chi. \quad (3.27)$$

Vegyük észre, hogy  $\chi$  a pálya mentén  $T_{00} = e$ , azaz valóban energiasűrűség,  $H$  pedig az

integrális energia. Mi minek a függvénye? Részletesen jelölve a változókat

$$\begin{aligned} \chi(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, \Pi_\alpha, r_i) = & \Pi_\beta \phi_{\beta,t}(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, \Pi_\alpha, r_i) \\ & - \Lambda(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, \phi_{\alpha,t}(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,b}, \Pi_\alpha, r_j), r_i). \end{aligned} \quad (3.28)$$

**Hamilton egyenletek**

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \Pi_\alpha} \right|_{\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}} = \left. \frac{\partial \chi}{\partial \Pi_\alpha} \right|_{\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, r_i} = \phi_{\alpha,t} + \Pi_\beta \frac{\partial \phi_{\beta,t}}{\partial \Pi_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\beta,t}} \frac{\partial \phi_{\beta,t}}{\partial \Pi_\alpha} = \phi_{\alpha,t}. \quad (3.29)$$

Variáljuk most  $\phi$ -t midőn  $\Pi$  változatlan

$$\begin{aligned} \delta H|_{\Pi_\alpha} &= \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_\alpha} \delta \phi_\alpha + \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_{\alpha,a}} \delta \phi_{\alpha,a} = \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_\alpha} \delta \phi_\alpha + \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_{\alpha,a}} (\delta \phi_\alpha)_{,a} \\ &= \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_\alpha} \delta \phi_\alpha + \int \left( \frac{\partial \chi}{\partial \phi_{\alpha,a}} \delta \phi_\alpha \right)_{,a} - \int \left( \frac{\partial \chi}{\partial \phi_{\alpha,a}} \right)_{,a} \delta \phi_\alpha. \end{aligned} \quad (3.30)$$

A második tag felületi integrállá alakítható s ezért eltűnik. (3.28,3.22) alapján kapjuk

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \phi_\alpha} \Big|_{\Pi_\alpha} &= \frac{\partial \chi}{\partial \phi_\alpha} - \left( \frac{\partial \chi}{\partial \phi_{\alpha,a}} \right)_{,a} = \Pi_\beta \frac{\partial \phi_{\beta,t}}{\partial \phi_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\beta,t}} \frac{\partial \phi_{\beta,t}}{\partial \phi_\alpha} \\ &\quad - \left( \Pi_\beta \frac{\partial \phi_{\beta,t}}{\partial \phi_{\alpha,a}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,a}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\beta,t}} \frac{\partial \phi_{\beta,t}}{\partial \phi_{\alpha,a}} \right)_{,a} \\ &= -\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_\alpha} + \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,a}} \right)_{,a} \stackrel{\text{ELE}}{=} - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,t}} \right)_{,t} = -\Pi_{\alpha,t}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Összefoglalva, a Hamilton egyenletek alakja

$$\frac{\delta H}{\delta \Pi_\alpha} \Big|_{\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}} = \phi_{\alpha,t}, \quad \frac{\delta H}{\delta \phi_\alpha} \Big|_{\Pi_\alpha} = -\Pi_{\alpha,t}. \quad (3.32)$$

Hasonlóan a pontmechanikához, ezek előnye, hogy első deriváltakat tartalmaznak.

## 3.6. Rugalmas hullámok terjedése egy dimenzióban

### 3.6.1. Húr transzverzális rezgései

Vizsgáljuk egy kellően nagy  $F$  erővel előfeszített húr kis transzverzális síkbeli rezgéseit. Az  $x = 0$  és  $x = \ell$  pontokban rögzített húr alakja legyen  $u(x, t)$ , ekkor az aktuális hossza

$$\ell' = \int_0^\ell dx \sqrt{1 + u_{,x}^2}. \quad (3.33)$$

Kis rezgések esetén a feszítő erő közel állandó, továbbá a gyököt sorba fejthetjük, ezért a nyugalmi állapothoz képest a potenciális energia változása

$$V = F(\ell' - \ell) \approx \frac{F}{2} \int_0^\ell dx u_{,x}^2. \quad (3.34)$$

A teljes kinetikus energia (itt  $\mu$  a hosszegységre eső tömeg)

$$T = \frac{\mu}{2} \int_0^\ell dx u_{,t}^2. \quad (3.35)$$

Tehát a hatás

$$S = \int dt(T - V) = \int dt dx \Lambda, \quad (3.36)$$

ahol a Lagrange sűrűségfüggvény

$$\Lambda = \frac{\mu}{2} u_{,t}^2 - \frac{F}{2} u_{,x}^2, \quad (3.37)$$

s innen az ELE

$$u_{,t,t} = \frac{F}{\mu} u_{,x,x}. \quad (3.38)$$

Ez az 1+1 dimenziós hullámeqyenlet, melyben a hullám sebessége

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}, \quad (3.39)$$

ahol  $\sigma$  a feszültség és  $\varrho$  a húr (térfogati) sűrűsége. Az EIT tenzorának elemei

$$e = \chi = \frac{\mu}{2} u_{,t}^2 + \frac{F}{2} u_{,x}^2 \quad (3.40)$$

$$j_e = -F u_{,t} u_{,x} \quad (3.41)$$

$$p = -\mu u_{,t} u_{,x} \quad (3.42)$$

$$T = e \quad (3.43)$$

Vegyük észre, hogy  $j_e = c^2 p$ .

**3.1. Gyakorló feladat.** Számítsuk ki az energia-impulzus tenzor elemeit  $u(x, t) = f(x \mp ct)$  haladó hullám esetére.

### 3.6.2. Longitudinális hullámok

Tekintsünk egy  $\ell$  hosszú,  $A$  keresztmetszetű rudat, amelyben  $u(x, t)$  longitudinális elmozdulástér jöhet létre. Az  $x$  kis  $\Delta x$  környezetének relatív megnyúlása

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{F(x)}{EA}, \quad (3.44)$$

ahol  $E$  a Young modulus és  $F(x)$  a hossztengety irányú erő. A hosszegységre eső potenciális energiából a teljes potenciál megkapható

$$\Delta V = \frac{1}{2} \Delta u F = \frac{(\Delta u)^2 A E}{2 \Delta x} \Rightarrow V = \frac{A E}{2} \int_0^\ell dx u_{,x}^2. \quad (3.45)$$

A hatás

$$S = \int dt (T - V) = \int dt dx \Lambda, \quad (3.46)$$

$$\Lambda = \frac{\mu}{2} u_{,t}^2 - \frac{A E}{2} u_{,x}^2, \quad (3.47)$$

és az ELE

$$u_{,t,t} = \frac{A E}{\mu} u_{,x,x} = \frac{E}{\rho} u_{,x,x}. \quad (3.48)$$

Újból az 1 + 1 dimenziós hullámegyenletet kaptuk, melyből a

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.49)$$

hangsebesség leolvasható. N.B.: A (3.39,3.49) fázissebességeket dimenzionális megfontolásból is megkaphatjuk numerikus szorzó erejéig.

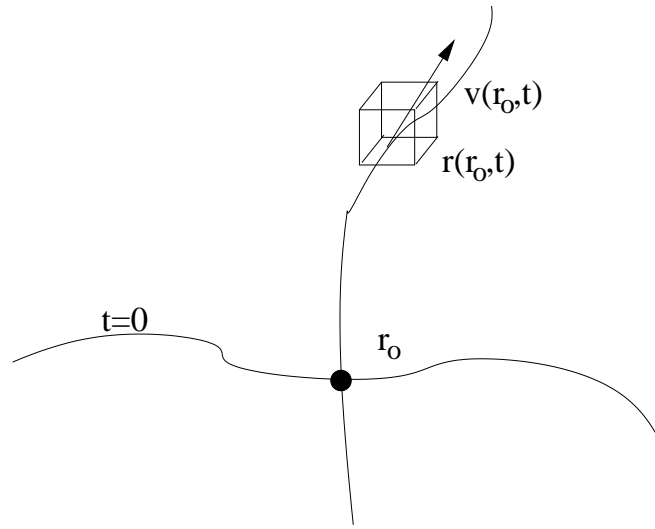
**3.1. Házi feladat.** *Írjuk fel a hullámmozgás Hamilton egyenleteit (10%).*

## 4. Emlékeztető hidrodinamikából

### 4.1. Koordináták

(a) **Lagrange koordináták** A koordináta a folyadékkelem pályájának kezdeti feltétele, a  $t = 0$  időpillanatbeli  $\mathbf{r}_0$  helyvektor. Ez az  $\mathbf{r}$  helyen lévő részecske „azonosító”-ja:

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, 0), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t). \quad (4.1)$$



5. ábra. A Lagrange koordináták a hidrodinamikában. A folyadék tömegelemek pályáját követjük.

(b) Euler koordináták

A koordináta a folyadékelem által aktuálisan elfoglalt  $\mathbf{r}$  hely, a sebességteret ennek

függvényében keressük

$$\mathbf{v}_{\text{Euler}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_{\text{Lagrange}}(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), t). \quad (4.2)$$

Itt kihasználtuk, hogy  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ -ből invertálással  $\mathbf{r}_0$  megkapható, azaz a pillanatnyi  $\mathbf{r}$  helyen levő tömegelem kezdeti  $\mathbf{r}_0$  pozíciója visszakövethető. Ez akkor teljesül, ha a sűrűség nem végtelen, azaz a Jacobi mátrix determinánsa nem szinguláris. Megfordítva

$$\mathbf{v}_{\text{Lagrange}}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{v}_{\text{Euler}}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t). \quad (4.3)$$

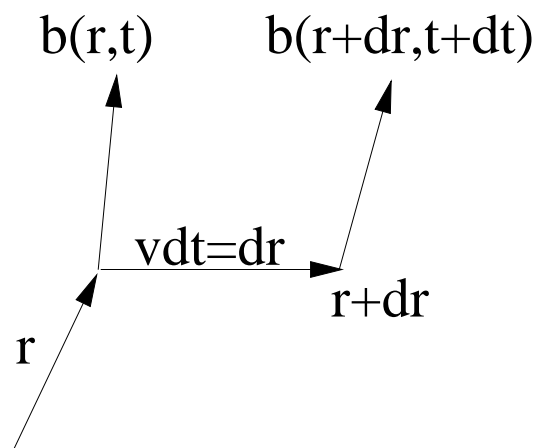
Pályamenti („totális”) derivált: a Lagrange képbeli  $\mathbf{b}_{\text{Lagrange}}(\mathbf{r}_0, t)$  mező időderiváltja Euler képben. Azaz

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{\text{Lagrange}}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{b}_{\text{Euler}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{b}_{\text{Euler}}(\mathbf{r}, t), \quad (4.4)$$

ennek tömör jelölése euleri mezőre

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{b}. \quad (4.5)$$

A második tag neve konvektív derivált. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy  $d/dt$  nem függvénytanai értelemben vett teljes időderivált.



6. ábra. A konvektív derivált illusztrációja

## 4.2. Euler egyenlet

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{f} \quad (4.6)$$

47

## 4.3. Kontinuitás

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0 \quad (\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}) \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \rho = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (4.8)$$

Inkompesszibilitás: a pálya mentén a sűrűség állandó

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (4.9)$$

## 4.4. Impulzummérleg

Impulzussűrűség

$$\mathbf{p} = \rho \mathbf{v} = \mathbf{j}. \quad (4.10)$$

A kontinuitási és az Euler egyenlet alapján

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v}(\nabla \rho \mathbf{v}) - \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f} = \\ &= -\nabla \underbrace{(\rho \mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \circ \mathbf{v})}_{\mathbf{T} \text{ impulzus áram sűrűség}} + \mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\mathbf{T}$  impulzus áram sűrűség

48



Lagrange sűrűségfüggvényünk s így térelméletünk még nincs, de impulzusáram sűrűséget már tudtunk definiálni.

## 4.5. Termodinamika

$M = \text{áll. tömegű kis tömegegységre:}$

$$dE = -pdV + TdS \quad \Rightarrow \quad d\frac{E}{M} = -pd\frac{V}{M} + Td\frac{S}{M} \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \quad d\frac{\epsilon}{\varrho} = -pd\frac{1}{\varrho} + Td\frac{s}{\varrho}, \quad (4.13)$$

ahol  $\epsilon$ ,  $s$  térfogatra vonatkoztatott sűrűségek.

Adiabatikus folyamatra a pálya mentén:

$$d\frac{\epsilon}{\varrho} = -pd\frac{1}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varrho} \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{\epsilon}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{dt} = \frac{p}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{dt} \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\epsilon + p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = -\underbrace{(\epsilon + p)}_{\substack{\text{entalpia} \\ w}} \nabla \mathbf{v} \quad (4.15)$$

Adiabaticitás: a pálya mentén

$$\frac{d\frac{s}{\varrho}}{dt} = 0. \quad (4.16)$$

Izentropikusság: a mezőre

$$d\frac{s}{\varrho} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{\varrho} = \text{térben és időben áll.} \quad (4.17)$$

Izentropikus az áramlás, ha a kezdetben homogén fajlagos entrópiájú közeg állapotváltozása adiabatikus. Ilyenkor a termodinamikáról megfelelkezve rugalmas alakváltozásként tekinthetjük a folyadékkelem sorsát.

## 4.6. Energiamérleg

Kinetikus energiasűrűség:

$$\tau = \frac{\varrho}{2} v^2 \quad (4.18)$$

Felhasználva a (4.6) és (4.8) egyenleteket:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{v^2}{2} \nabla(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla p + \underbrace{\mathbf{v} \mathbf{f}}_{\omega} = \\
 &= -\frac{v^2}{2} \nabla(\rho \mathbf{v}) - \frac{\rho}{2} \mathbf{v} \nabla v^2 - \nabla \mathbf{v} p + p \nabla \mathbf{v} + \omega = \\
 &= -\nabla \left( \mathbf{v} \left( \rho \frac{v^2}{2} + p \right) \right) + \omega + p \nabla \mathbf{v} = -\nabla(\mathbf{v}(\tau + p)) + \omega + p \nabla \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

A belső energia időbeli változása a pályamenti deriváltból visszszámolva

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{d\epsilon}{dt} - \mathbf{v} \nabla \epsilon = -\underbrace{(p + \epsilon)}_w \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \epsilon = -\nabla(\mathbf{v} \epsilon) - p \nabla \mathbf{v} \tag{4.20}$$

Ha összeadjuk a fenti két egyenletet, akkor az

$$e = \epsilon + \tau \tag{4.21}$$

jelöléssel az alábbi mérlegegyenletet kapjuk

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla(\underbrace{\mathbf{v}(e + p)}_{\mathbf{j}_e}) + \omega. \tag{4.22}$$

Vegyük észre, hogy az energiaáram sűrűség nem (energiasűrűség  $\times$  sebesség) alakú, hanem az extra  $\mathbf{v}p$  tag is megjelenik!

**4.1. Házi feladat.** *Vezessük le a (4.22) mérlegegyenletet mikroszkopikusan, azaz Dirac-deltákkal kifejezett sűrűségek segítségével (25%).*

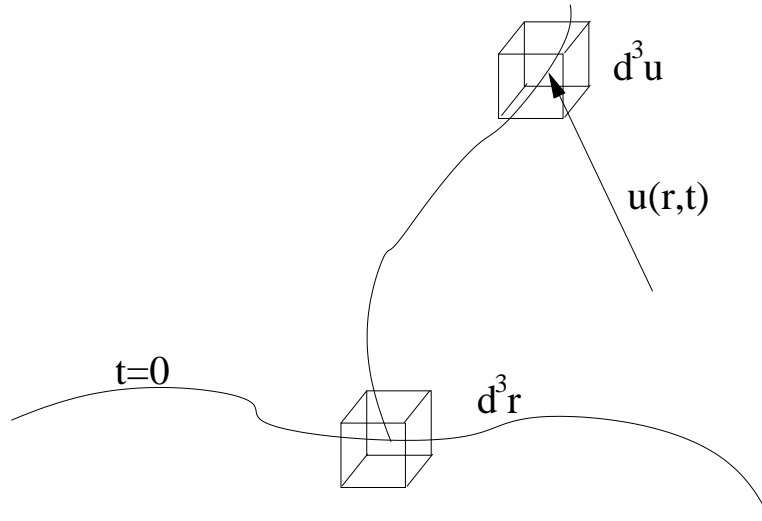
## 4.7. Lagrange koordináták átjelölése

Legyen az aktuális hely ill. a kezdeti pozíció

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \tag{4.23}$$

azaz  $\mathbf{u}$  a dinamikai változónk, korábbi jelöléssel  $\mathbf{r}$ , és  $\mathbf{r}$ -el a korábbi  $\mathbf{r}_0$ -t jelöljük, ezért

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \tag{4.24}$$



7. ábra. A Lagrange koordináták az új jelöléssel

#### 4.8. Kontinuitás Lagrange koordinátákkal

$$\varrho(\mathbf{r}, t)d^3u = \underbrace{\varrho(\mathbf{r}, 0)}_{\varrho_0(\mathbf{r})}d^3r \quad (4.25)$$

53

Bevezetve a  $\mathbf{J}$  Jacobi-mátrixot és annak  $J$  determinánsát

$$J_{ab} = u_{a,b} = \frac{\partial u_a}{\partial r_b}, \quad J_{ab}^{-1} = \frac{\partial r_a}{\partial u_b}, \quad J = \det \mathbf{J} \quad (4.26)$$

kapjuk

$$\varrho d^3u = \varrho J d^3r = \varrho_0 d^3r \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{\varrho_0(\mathbf{r})}{J(\mathbf{r}, t)} \quad (4.27)$$

#### 4.9. Mozgásegyenlet Lagrange koordinátákkal

A Newton egyenlet egy tömegelemre, ha nincs külső erő

$$\varrho \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_r = -\nabla_u p \quad \Rightarrow \quad \varrho \frac{\partial v_a}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r_b} \frac{\partial r_b}{\partial u_a}. \quad (4.28)$$

Innen az Euler egyenlet Lagrange koordinátás alakja

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\nabla p) \mathbf{J} \mathbf{J}^{-1}. \quad (4.29)$$

54

A  $J\mathbf{J}^{-1}$  a  $J$  determinánsnak a mátrixelemek szerinti deriválásával állítható elő. A Jacobi determináns

$$J = \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon_{def} J_{ad} J_{be} J_{cf}, \quad (4.30)$$

ahol ismétlődő indexekre összegzünk. Innen

$$\frac{\partial J}{\partial J_{ad}} = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \epsilon_{def} J_{be} J_{cf} = J J_{da}^{-1}. \quad (4.31)$$

Valóban, ha a középső kifejezést  $J_{ag}$ -vel szorozzuk és  $a$ -ra összegzünk, akkor  $J\delta_{dg}$ -t kapunk. Képezzük a divergenciát

$$\frac{\partial}{\partial r_d} \frac{\partial J}{\partial J_{ad}} = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \underbrace{\epsilon_{def}}_{\text{antiszimm.}} J_{be} \underbrace{\frac{\partial^2 u_c}{\partial r_d \partial r_f}}_{\text{szimm.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla(J\mathbf{J}^{-1}) = 0 \quad (4.32)$$

Innen kapjuk a (4.29) mozgásegyenlettel ekvivalens alakot

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla(pJ\mathbf{J}^{-1}) \quad (4.33)$$

## 5. A hidrodinamika mint térelmélet (Lagrange koordinátákkal)

### 5.1. Hamilton-elv

Pontmechanikából

$$L = T - V, \quad (5.1)$$

$$T = \int d^3u \frac{1}{2} \varrho(\mathbf{r}, t) v^2 = \int d^3r \varrho_0(\mathbf{r}) \frac{v^2}{2}, \quad (5.2)$$

$$V = \int d^3u \varrho \epsilon = \int d^3r \varrho_0 \epsilon.$$

Új jelölés:  $\epsilon$  mostantól a fajlagos, azaz tömegegységre vonatkoztatott belső energia (az energiasűrűség ezzel  $\varrho\epsilon$ ). A térkoordináta a kezdeti időpillanatbeli  $\mathbf{r}$ , a dinamikai változó pedig az  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  pálya nyaláb. Ezek alapján propozíciónk a Lagrange sűrűségfüggvényre

$$\Lambda = \varrho_0 \left( \frac{v^2}{2} - \epsilon \right). \quad (5.3)$$

## 5.2. Termodinamika

Adiabatikus folyamatra a pálya mentén a tömegelem entrópiája állandó, azaz a fajlagos entrópia csak a kezdeti pozíciótól függ, az időtől nem

$$s(\mathbf{r}, t) = s_0(\mathbf{r}). \quad (5.4)$$

Tegyük fel, hogy adva van az állapotegyenlet

$$\epsilon = \epsilon(\varrho, s) = \epsilon\left(\frac{\varrho_0}{J}, s_0\right). \quad (5.5)$$

Az ELE-hez szükségünk lesz az energia deriváltjára az  $\mathbf{u}$  elmozdulástér gradiense, azaz a Jacobi mátrix elemei szerint. Ehhez felidézzük az I. főtételt, melynek differenciális alakja a mezőkre, vagyis különböző tömegelemek összehasonlításakor is igaz

$$d\epsilon = \frac{p d\varrho}{\varrho^2} + T ds, \quad (5.6)$$

a pálya mentén pedig az adiabatikusság miatt

$$d\epsilon = \frac{p d\varrho}{\varrho^2}. \quad (5.7)$$

## 5.3. Euler–Lagrange egyenletek

$$\Lambda(u_a, u_{a,b}, u_{a,t}, r_a, t) = \varrho_0 \left( \frac{v^2}{2} - \epsilon\left(\frac{\varrho_0}{J}, s_0\right) \right). \quad (5.8)$$

A dinamikai tér az  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  pillanatnyi pozíció. A  $\Lambda$  változói hol fordulnak elő? Az  $\mathbf{r}$  koordináta a kezdeti  $\varrho_0(\mathbf{r})$  és  $s_0(\mathbf{r})$  terekben lép fel, a  $t$  idő és az  $\mathbf{u}$  tér expliciten nem szerepel, a sebesség  $v_a = u_{a,t}$ , és a  $u_{a,b}$  gradiens elemei a  $J$  determinánsan keresztül jelennek meg. A  $\Lambda$  deriváltjai

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_a} = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,t}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial v_a} = \varrho_0 v_a, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,b}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial J_{ab}} = -\varrho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial J_{ab}} \frac{\varrho_0}{J} = \frac{\varrho_0^2}{J^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \varrho} J J_{ba}^{-1} = \varrho^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \varrho} J J_{ba}^{-1} = p J J_{ba}^{-1}. \quad (5.11)$$

Az Euler–Lagrange egyenlet

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_a} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,t}} + \frac{\partial}{\partial r_b} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,b}}, \quad (5.12)$$

amelybe a fent kiszámított deriváltakat behelyettesítve nyerjük

$$\varrho_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r_b} p J J_{ba}^{-1}. \quad (5.13)$$

Mivel visszakaptuk a korábban levezetett (4.33) mozgásegyenletet, láthatjuk, hogy jól sejtettük meg a Lagrange sűrűségfüggvényt.

## 5.4. Energia-impulzus tenzor

$$T_{ij} = u_{a,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,j}} - \delta_{ij} \Lambda, \quad (5.14)$$

$$e = T_{00} = v_a \frac{\partial \Lambda}{\partial v_a} - \Lambda = \varrho_0 \left( \frac{v^2}{2} + \epsilon \right), \quad (5.15)$$

$$[\mathbf{j}_e]_a = T_{0a} = v_b \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{b,a}} = v_b p J J_{ab}^{-1} = p J [\mathbf{J}^{-1} \mathbf{v}]_a, \quad (5.16)$$

$$[\mathbf{p}]_a = T_{a0} = -u_{b,a} \frac{\partial \Lambda}{\partial v_b} = -J_{ba} \varrho_0 v_b = -\varrho_0 [\mathbf{v} \mathbf{J}]_a, \quad (5.17)$$

$$T_{ab} = -u_{c,a} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{c,b}} + \delta_{ab} \Lambda = -J_{ca} p J J_{bc}^{-1} + \delta_{ab} \Lambda = \delta_{ab} (\Lambda - p J). \quad (5.18)$$

Az energiasűrűség megegyezik a korábban kiszámítottal, de az EIT többi eleme különbözik az euléri formuláktól! Ez nem meglepő, hiszen a lagrange-i koordináta

- nem az aktuális, hanem a kezdeti  $\mathbf{r}$  hely, s az áramok divergenciája eszerint képzendő
- expliciten megjelenik a Lagrange sűrűségfüggvényben akkor is, ha nincs külső potenciál, ezért az impulzusmérleg forrást is tartalmaz.

## 5.5. Energiamérleg

A (3.16) mérlegegyenletek közül az energiára vonatkozó

$$\varrho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v^2}{2} + \epsilon \right) + \nabla \cdot (p \mathbf{J} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{v}) = - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \Big|_u = 0. \quad (5.19)$$

Áttérve Euler koordinátákra

$$\varrho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + \epsilon \right) + \nabla_u (p \mathbf{v}) = 0. \quad (5.20)$$

**5.1. Gyakorló feladat.** *Mutassuk meg, hogy ez ekvivalens a (4.22) energiamérleggel.*

## 5.6. Impulzusmérleg

$$\varrho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}\mathbf{J}) + \nabla(pJ) - \nabla\Lambda = -\nabla\Lambda|_u. \quad (5.21)$$

Mivel  $\Lambda$  a  $\varrho_0(\mathbf{r})$ -en és az  $s_0(\mathbf{r})$ -en keresztül függ expliciten a koordinátáktól, a  $\nabla_a\Lambda|_u$  ezek szerinti deriváltakat tartalmazza. A következő mellékszámításokat végezzük

$$v_b(J_{ba})_{,t} = v_b u_{b,a,t} = v_b v_{b,a} = \frac{1}{2} \nabla_a v^2, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \nabla_a \Lambda &= \nabla_a \Lambda|_u + \varrho_0 \frac{1}{2} \nabla_a v^2 - \varrho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial \varrho} \varrho_0 \nabla_a \frac{1}{J} \\ &= \nabla_a \Lambda|_u + \varrho_0 \frac{1}{2} \nabla_a v^2 + p \nabla_a J. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Az (5.21) mérlegegyenlet a behelyettesítések után

$$\varrho_0 v_{b,t} J_{ba} = -J \nabla_a p, \quad (5.24)$$

ez éppen az (5.13) mozgásegyenlet.

61

## 5.7. Hamilton egyenletek

A kanonikus impulzussűrűség

$$\Pi_a = \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,t}} = \varrho_0 v_a \quad \Rightarrow \quad u_{a,t} = \frac{\Pi_a}{\varrho_0}, \quad (5.25)$$

a  $H$  Hamilton függvény  $\chi$  sűrűsége egyben az  $e$  energiasűrűség

$$H = \int d^3r \chi, \quad \chi = u_{a,t} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,t}} - \Lambda = \frac{\Pi^2}{\varrho_0} - \Lambda = \frac{\Pi^2}{2\varrho_0} + \epsilon = e. \quad (5.26)$$

A Hamilton egyenletek az (5.13) mozgásegyenlet ekvivalens alakját adják

$$\frac{\delta H}{\delta \Pi_a} = \frac{\partial \chi}{\partial \Pi_a} = \frac{\Pi_a}{\varrho_0} = u_{a,t}, \quad (5.27)$$

$$\frac{\delta H}{\delta u_a} = \frac{\partial \chi}{\partial u_a} - \left( \frac{\partial \chi}{\partial u_{a,b}} \right)_{,b} = (pJ J_{ba}^{-1})_{,b} = -\Pi_{a,t}. \quad (5.28)$$

**Megjegyzés:** Euler koordinátákkal a térelmélet bonyolultabb. Ilyet a relativisztikus esetben fogalmazunk meg, ennek speciális eseteként a nemrelativisztikus elmélet kiadódik.

62

## 6. Bevezetés a speciális relativitáselmélet kinematikájába

### 6.1. Inerciarendszerek, ívhossz

- Vonatkoztatási rendszer: nyugvó méterrudak és órák rendszere.
- Inerciarendszer (IR) az olyan vonatkoztatási rendszer, melyben a szabadon mozgó testek sebessége állandó.
- Esemény: valamely  $(ct, \mathbf{r})$  koordinátákkal jellemezhető téridőbeli pont.

Bevezetjük a két esemény közötti ívhossz fogalmát

$$\Delta s_{AB} = \sqrt{c^2(t_B - t_A)^2 - (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)^2}. \quad (6.1)$$

A tapasztalat szerint a fény sebessége minden IR-ben irányfüggetlenül ugyanaz. Ezért ha  $\Delta s = 0$  akkor  $\Delta s' = 0$ , ahol  $\Delta s$  és  $\Delta s'$  két IR-ben mért ívhossz.

Legyen  $\mathcal{K}$  IR és  $\mathcal{K}'$  hozzá képest  $\mathbf{V}$  sebességgel mozgó IR. Mivel  $ds$  és  $ds'$  azonos rendű

63

kicsiny mennyiségek, vezető rendben

$$ds^2 = a(|\mathbf{V}|)ds'^2, \quad (6.2)$$

ahol a konstans szorzó a téridő homogenitása, és a tér izotrópiája miatt csak  $|\mathbf{V}|$ -től függhet. Ha az IR-ek egyike sincs kitüntetve (ez a relativitás elve), akkor

$$a(|-\mathbf{V}|)ds^2 = ds'^2. \quad (6.3)$$

A fenti két egyenlet pozitív megoldása

$$a(|\mathbf{V}|) = 1. \quad (6.4)$$

Azaz a  $ds$  ívelem invariáns skalár, következésképpen a véges ívhosszak is invariánsak az IR választására nézve.

### 6.2. Lorentz transzformáció

A Lorentz transzformáció különböző IR-ek koordinátái között teremt összefüggést. Formai követelmény, hogy tartsa meg az ívhosszt, azaz  $(ct)^2 - \mathbf{r}^2$  legyen invariáns. Jelöljük

64



egy esemény koordinátáit a következő módon  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r_x$ ,  $x^2 = r_y$ ,  $x^3 = r_z$ , azaz

$$x^i = \begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Tekintsünk egy  $x = x^1$ -irányú boost-ot<sup>a</sup>, azaz haladjon a  $\mathcal{K}'$  origója  $v$  relatív sebességgel  $x$  irányban. Ekkor  $(x^0)^2 - (x^1)^2$  invariáns skalár, ez az 1 + 1 dimenziós eset. Bevezetjük az

$$a^0 = x^0, \quad a^1 = ix^1 \quad (6.6)$$

jelölést, ezzel

$$(a^0)^2 + (a^1)^2 = \text{inv. skalár} \quad (6.7)$$

A (6.7)-et invariánsan hagyó transzformáció<sup>b</sup> ismert módon

$$\begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

<sup>a</sup>boost:  $x$  irányban állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérés. Fordítása: erősítés, fokozás.

<sup>b</sup>Homogén transzformációkat tekintünk, az eltolás csak az origó helyzetét változtatná meg.

ahol megengedjük, hogy  $\alpha$  komplex legyen. Mivel  $x^i$  valós, azért  $\alpha$  tisztán képzetes,

$$\alpha = i\beta \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (6.9)$$

mint azt láthatjuk az  $x^i$  koordinátákat transzformáló képletből

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ -(\sin \alpha)/i & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta \\ -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Vezessük be a  $\gamma = \cosh \beta$  jelölést, és használjuk  $ct = x^0$ ,  $x = x^1$ -et! A  $\mathcal{K}'$  origója  $v$  relatív sebességgel halad

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x}{t} = c \tanh \beta \quad \Rightarrow \quad \sinh \beta = \frac{v}{c} \gamma, \quad (6.11)$$

ahonnan a Lorentz transzformáció 1 + 1 dimenzióban

$$x' = \gamma x - v\gamma t, \quad (6.12)$$

$$ct' = \gamma ct - \frac{v}{c}\gamma x. \quad (6.13)$$

Kilépve 1 + 3 dimenzióba, a boost-ra merőleges koordinátákra

$$y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2. \quad (6.14)$$

Az  $(y, z)$  síkban tehát legfeljebb elfordulás lehetséges, azonban ennek irányát semmilyen fizikai ok nem tünteti ki, ezért a legegyszerűbb feltevéssel élünk, éspedig, hogy a merőleges koordináták egyenként invariánsak. Tetszőleges irányú boostra ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad \Rightarrow \quad x'^0 &= \gamma x^0 - (\mathbf{n}\mathbf{x})\gamma\frac{v}{c} = \gamma x^0 - \frac{\gamma}{c}(\mathbf{v}\mathbf{x}), \\ (\mathbf{n}\mathbf{x}') &= \gamma(\mathbf{n}\mathbf{x}) - \frac{v}{c}\gamma x^0, \\ \mathbf{x}' - (\mathbf{n}\mathbf{x}')\mathbf{n} &= \mathbf{x} - (\mathbf{n}\mathbf{x})\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

A második egyenletet  $\mathbf{n}$ -nel szorozva hozzáadjuk a harmadikhoz

$$\mathbf{x}' = -\frac{v}{c}\gamma x^0 + \mathbf{x} + (\gamma - 1)(\mathbf{n}\mathbf{x})\mathbf{n}. \quad (6.16)$$

Mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c}\mathbf{v} \\ -\frac{\gamma}{c}\mathbf{v} & \mathbf{I} + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}) \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

**6.1. Gyakorló feladat.** *Mutassuk meg, hogy  $\mathbf{\Lambda}(-\mathbf{v}) = \mathbf{\Lambda}^{-1}(\mathbf{v})$ .*

### 6.3. Négyesvektorok, tenzorok

Az  $A^i$  mennyiséget négyesvektornak nevezzük, ha IR-ek között ugyanúgy transzformálódik, mint az  $x^i$  négyes helyvektor. Bevezetjük az alul indexelt komponenseket

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (6.18)$$

Az Einstein-féle konvenció szerint ismétlődő alsó-felső indexpárral jelöljük az összegzést, melynek eredménye skalár, az  $A^i$  vektor "hossza"

$$A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2. \quad (6.19)$$

Másodrendű négyestenzornak nevezzük az  $A^{ik}$ -t, ha úgy transzformálódik, mint az  $A^i B^k$  diád. Az indexek fel-le "húzogatósa" a diádéival azonosan történik

$$\begin{aligned} A_{00} &= A^{00}, & A_{01} &= -A^{01}, & A_{11} &= A^{11}, & \dots \\ A_0^0 &= A^{00}, & A_0^1 &= A^{01}, & A_1^0 &= -A^{01}, & A_1^1 &= -A^{11}, & \dots \end{aligned} \quad (6.20)$$

Hasonlóan definiáljuk a tetszőleges rendű négyestenzorokat. Az egységtenzor, azaz a Kronecker delta, most egy alsó és egy felső indexszel rendelkezik

$$\delta_i^k A^i = A^k. \quad (6.21)$$

Bevezetjük a  $g^{ik}$  metrikus tenzort, amely a  $\delta_i^k$  indexeinek föl- ill. lehúzásával kapható a (6.20) szabály szerint

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

A metrikus tenzonnal éppen az indexek fel- és lehúzása végezhető el

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k, \quad A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k, \quad \dots \quad (6.23)$$

A teljesen antiszimmetrikus negyedrendű (pszeudo) egységtenzor jele  $\epsilon^{iklm}$ , felső indexekkel a szokásos módon definiáljuk, s a többi változatot a metrikus tenzonnal generáljuk.

## 6.4. Sajátidő, idődilatáció

Valamely IR-ben nyugvó megfigyelő által mért idő a sajátidő, ez IR-től függetlenül definiált mennyiség és  $\tau$ -val jelöljük. Mozogjon  $\mathcal{K}'$  a  $\mathcal{K}$ -hoz képest  $\mathbf{v}$  sebességgel. A  $\mathcal{K}'$ -ben nyugvó megfigyelő által mért ívhossz éppen  $c \times$  sajátidő, mert  $d\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ . Ez  $\mathcal{K}$ -ból nézve ugyanakkora

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 = c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 \quad \Rightarrow \quad d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt/\gamma. \quad (6.24)$$

Tehát minden más IR-ből nézve hosszabb időt mérünk, ez az idődilatáció. A négyes térben adott pályákat, "világvonal"-akat, IR-ektől függetlenül értjük, míg konkrét leírásuk természetesen vonatkoztatási rendszerekből történik. Egy az  $A$  és  $B$  téridőbeli pontok

közötti világvonálhoz az integrális sajátidőt rendelhetjük

$$\tau = \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}. \quad (6.25)$$

A  $c\tau$  az  $A$  és  $B$  közötti ívhossz. A  $\tau$  Lorentz skalár, hiszen a definíciója független attól, milyen IR-ből mérjük. Az elvet később is használni fogjuk: valamely tömegpont pillanatnyi nyugalmi helyzetében definiált skalár, pl. sűrűség vagy hőmérséklet egyben Lorentz skalár.

A Lorentz transzformációból kapható eredmény ezzel természetesen összhangban van. A (6.12)-be  $x' = 0$ -t helyettesítve és (6.13)-ból a  $v = x/t$  felhasználásával adódik

$$t' = t/\gamma = \tau. \quad (6.26)$$

Azaz a  $\mathcal{K}'$  origójában levő órán lassabban telik az idő, mint azt a  $\mathcal{K}$ -ból mérjük.

## 6.5. Lorentz kontrakció

Mozogjon a  $\mathcal{K}$ -ban  $A$  és  $B$  végpontú  $x$  irányú rúd  $v$  sebességgel a hossz tengelye mentén. A  $\mathcal{K}'$ -t rögzítsük a rúdhhoz, melyben a rúd nyugalmi hossza  $L_0$ . A két IR téridő origói

essenek egybe. A  $\mathcal{K}'$ -ben az végpontok időben állandóak

$$x'_A(t') = 0, \quad x'_B(t') = L_0. \quad (6.27)$$

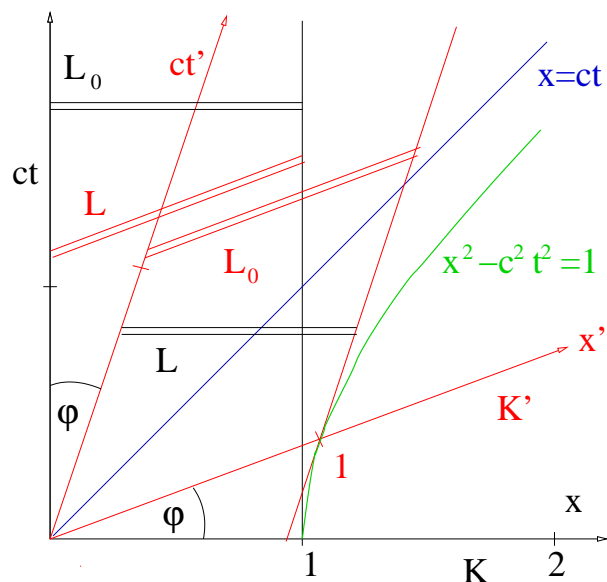
Ebből a Lorentz transzformáció segítségével a  $\mathcal{K}$ -beli világvonalak egyenleteit kapjuk

$$0 = x_A(t) - vt, \quad L_0 = \gamma(x_B(t) - vt). \quad (6.28)$$

A  $\mathcal{K}$ -ban a rúd hossza az egydejú távolság

$$L = x_B(t) - x_A(t) = \frac{L_0}{\gamma}. \quad (6.29)$$

A két IR-ben a rúd B végpontjának helymérése különböző téridőbeli eseményeknek felel meg!



8. ábra. A Lorentz kontrakció geometriai ábrázolása. A fénysebesség invarianciája alapján a  $\mathcal{K}'$  hossz- és időtengelyei közös szögfelezőjű, hegyesszöget bezáró egyenesek,  $\operatorname{tg} \varphi = v/c$ . Az  $x^2 - c^2 t^2 = 1 = x'^2 - c^2 t'^2$  hiperbolát minden  $\mathbb{R}$ -ben, amelyek origói egybeesnek, ugyanazon egyenlet adja, ezért az a  $\mathcal{K}'$ -beli hosszegységet metszi ki a  $t' = 0$  tengelyből. A  $\mathcal{K}'$ -beli 1 hosszúságú rúd ( $L_0$ ) a  $\mathcal{K}$ -ban mérve 1-nél rövidebb ( $L$ ) és viszont.

73

**6.1. Házi feladat.** Vezessük le a kontrakció mértékét geometriai úton, azaz mutassuk meg, hogy (i) az  $x' = 1$  egyenes a hiperbola érintője; (ii) ez az egyenes épp az  $1/\gamma$  hosszat metszi ki a  $t = 0$  tengelyből; (iii) és megfordítva, az  $x = 1$  (függőleges) érintő ugyanezt a hosszat metszi ki a  $t' = 0$  tengelyből. (15%)

## 6.6. Négyessebesség, négyesgyorsulás

A négyessebesség:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad (6.30)$$

$u^i$  négyesvektor, mert  $d\tau$  skalár. Nyilván

$$ds^2 = dx^i dx_i = c^2 d\tau^2 \Rightarrow u^i u_i = c^2. \quad (6.31)$$

Pillanatnyilag együttmozgó rendszerben  $u^a = 0$ ,  $a = 1, 2, 3$ , ezért

$$u^i = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

74

és általános IR-ből nézve Lorentz transzformációval adódik

$$u^i = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \mathbf{v}\gamma \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

a sebességnégyzet innen is láthatóan  $c^2$ . Hasonlóan definiálható a négyesgyorsulás is

$$w^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2}. \quad (6.34)$$

Az  $u^i u_i = c^2$  egyenletet differenciálva látjuk, hogy a négyesgyorsulás merőleges a sebességre

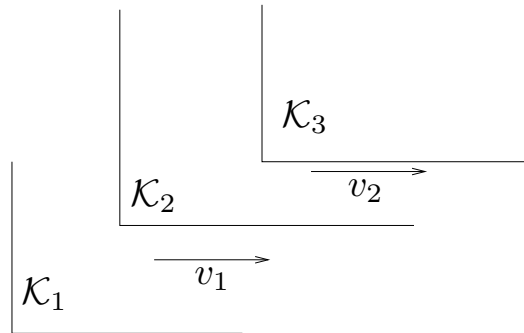
$$u_i w^i = 0. \quad (6.35)$$

## 6.7. Sebességek összeadása

### 6.7.1. Azonos irányú boostok összege

Tekintsünk három IR-t,  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ . Mozogjon  $\mathcal{K}_1$ -hez képest a  $\mathcal{K}_2$   $v_1$ -el és  $\mathcal{K}_2$  -höz képest a  $\mathcal{K}_3$   $v_2$ -vel.

75



9. ábra. Párhuzamos boost-ok.

Azt vizsgáljuk, vajon  $\mathcal{K}_1$  hez képest milyen  $v_3$ -al mozog a  $\mathcal{K}_3$ , azaz meghatározzuk két egymást követő Lorentz transzformáció hatását

$$\mathbf{\Lambda}(v_1)\mathbf{\Lambda}(v_2) = \mathbf{\Lambda}(v_3). \quad (6.36)$$

Áttérünk a könnyebben kezelhető  $\beta$  rapiditás paraméterre,  $v = c \tanh \beta$ , és felidézzük, hogy 1 + 1 dimenzióban  $\beta$  a Minkowski-térbeli imaginárius forgatási szögnek felel meg. Innen nyilvánvaló, hogy a rapiditások összeadódnak

$$\mathbf{\Lambda}(\beta_1)\mathbf{\Lambda}(\beta_2) = \mathbf{\Lambda}(\beta_1 + \beta_2) = \mathbf{\Lambda}(\beta_3). \quad (6.37)$$

76

A sebességekre ebből következően

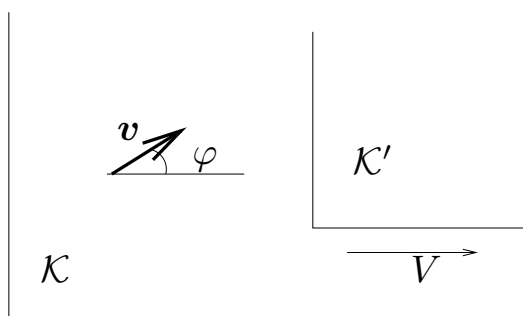
$$v_3 = c \operatorname{th}(\beta_3) = \operatorname{th}(\beta_1 + \beta_2) = c \frac{\operatorname{th}\beta_1 + \operatorname{th}\beta_2}{1 + \operatorname{th}\beta_1 \operatorname{th}\beta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (6.38)$$

A Lorentz transzformáció mátrixát alkalmazva 1 + 3 dimenzióban párhuzamos boost-okra természetesen ugyanezt kapjuk.

### 6.7.2. A sebességvektor elfordulása

Mozogjon a  $\mathcal{K}$  rendszerben egy részecske úgy hogy sebességvektora  $\varphi$  szöget zár be az  $x$  iránnyal, és abszolút értéke  $v$ .

77



10. ábra. A  $v$  sebesség  $\mathcal{K}'$ -ben látott elfordulását vizsgáljuk.

Vizsgáljuk meg hogy milyen szöget zár be a részecske sebességvektora abban a  $\mathcal{K}'$  rendszerben amely  $x$  irányban halad  $\mathcal{K}$ -hoz képest, s relatív sebességüket a  $\beta = \operatorname{arth}(V/c)$  rapiditás jellemzi. A  $\mathcal{K}$  rendszerben  $v$ -hez a  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  tartozik, és hasonlóan a  $\mathcal{K}'$  rendszerben  $v'$ -hez, amely a részecske sebessége onnan nézve, a  $\gamma'$ -t rendeljük. A négyessebességre alkalmazva a Lorentz transzformációt

$$\begin{aligned} \gamma' v'_x &= \operatorname{ch}\beta \gamma v_x - \operatorname{ch}\beta \frac{V}{c} c \gamma, \\ \gamma' v'_y &= \gamma v_y. \end{aligned} \quad (6.39)$$

78

A fenti két egyenletet elosztva egymással megkapjuk hogy a  $\mathcal{K}'$ -ben mekkora  $\varphi'$  szöveget zár be a részecske sebessége az  $x'$  koordinátatengellyel

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{1}{\operatorname{ch}\beta} \frac{v_y}{v_x - V}. \quad (6.40)$$

A fenti képlet csak a  $(\operatorname{ch}\beta)^{-1}$  szorzóban tér el a nemrelativisztikus formulától. Ha fénysugarat vizsgálunk akkor az előzőekből kapjuk

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{1}{\operatorname{ch}\beta} \frac{c \sin \varphi}{c \cos \varphi - V}. \quad (6.41)$$

Ha a nevező zérus, akkor a fénysugár  $\mathcal{K}'$ -ből látszó iránya merőleges a relatív sebességre

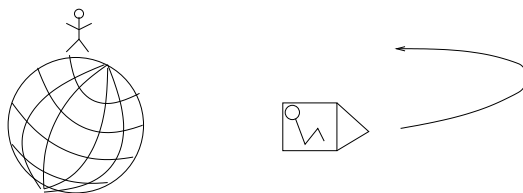
$$\varphi = \arccos(V/c) \quad \Rightarrow \quad \varphi' = \pi/2. \quad (6.42)$$

**6.2. Házi feladat.** *Határozzuk meg a sebességösszeadás szabályát nem párhuzamos boost-okra a Lorentz transzformáció 1+3 dimenziós mátrixának felhasználásával. (20%)*

## 6.8. Paradoxonok

### 6.8.1. Ikerparadoxon

Ikerpár egyik tagja űrhajóra szállva közel fénysebességgel távolodik, majd visszafordul a Földre, ezalatt testvére a Földön tartózkodik. A látszólagos ellentmondás abban áll, hogy az utas azt gondolhatja, a Földön maradt testvére öregszik, míg emez azt, hogy az utas lesz öregebb. A két meggondolás egyike lehet csak igaz.

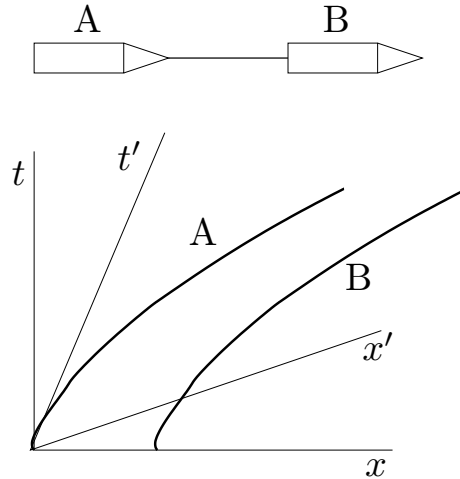


11. ábra. **Melyikük lesz öregebb?**



### 6.8.2. Összekötött űrhajók

Két űrhajót kötéssel összekötöttek, azonos pillanatban egymás mögött indították őket, azóta az űrhajók azonos gyorsulással mozognak. Földi megfigyelő szerint a kötélt kontrakciót szenved, s mivel az űrhajók közötti távolság nem változik, a kötélt elszakad. Ezzel szemben az űrhajósok szerint a kötélt nem rövidül, ezért nem szakad el.

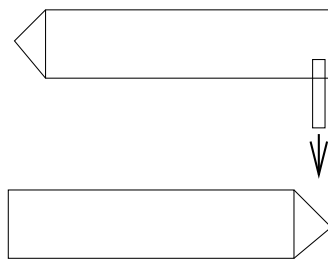


12. ábra. Összekötött űrhajók és út-idő diagramjuk.

81

### 6.8.3. Űrcsata

Két azonos méretű űrhajó egymással szemben, közeli párhuzamos vonalak mentén halad. Amikor fedésbe kerülnek, akkor az egyik űrhajó végén levő lézerágyúból a másik orrára lőnek. Az első azt láthatja, hogy a másik rövidült, ezért nem találna, de a célbavett szemszögéből a támadó rövidült, ezért telibe talál. Oldjuk fel a paradoxont!

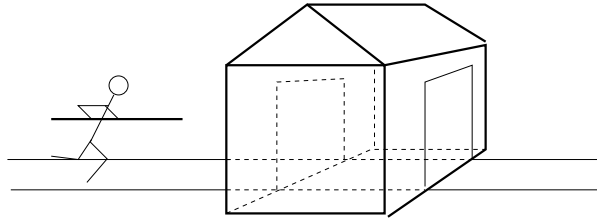


13. ábra. Talált-e a lövés?

82

#### 6.8.4. Rúd-pajta

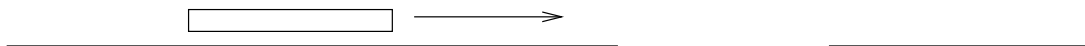
Gyorsan futó ember kezében rúddal egy pajta két egymással szemben levő nyitott ajtaja felé tart. A pajta nyugalmi hossza 10 méter, a rúd nyugalmi hossza ugyanennyi. A pajta rendszeréből nézve a rúd Lorentz kontrakciót szenved és így befér a pajtába, tehát lesz olyan időpont amikor a teljes rúd a pajtában van. A futó nyugalmi rendszerében viszont a pajta szenved kontrakciót így a rúd soha sem fér a pajtába. Melyik megfigyelőnek van igaza?



14. ábra. Befér-e a rúd?

#### 6.8.5. Rúd-lyuk

Sík lapon rúd csúszik a nyugalmi hosszával azonos átmérőjű lyuk felé. A rúddal mozgó IR-ből nézve a lyuk rövidült, ezért a rúd nem fér bele, viszont a lyukhoz rögzített IR-ből a rúd rövidült, azaz beleesik a lyukba. Mi történik?



15. ábra. Beleesik-e a rúd a lyukba?

## 7. Pontmechanika görbevonali koordinátákban

### 7.1. Nemrelativisztikus tömegpont szabad mozgása

Az alábbi egyenletek alkalmazhatók olyan egyszerű esetekben is mint pl.

- rögzített felületen való mozgás
- szabad mozgás görbevonali koordinátákkal

Távolságelem a koordinátaelemekkel kifejezve

$$d^2s = g_{ab}dq^a dq^b, \quad (7.1)$$

ahonnan a kinetikus energia ( $m = 1$ )

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}_a = \frac{1}{2}g_{ab}(q)\dot{q}^a \dot{q}^b = L \quad (7.2)$$

$$\text{ELE: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} \quad (7.3)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \dot{q}_a = \frac{d}{dt} (g_{ab} \dot{q}^b) = \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} \dot{q}^c \dot{q}^b + g_{ab} \ddot{q}^b = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} \dot{q}^b \dot{q}^c \quad (7.4)$$

85

Átrendezve:

$$g_{ab} \ddot{q}^b + \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} \right) \dot{q}^b \dot{q}^c = 0 \quad (7.5)$$

A  $b, c$  indexekben szimmetrizálva kapjuk

$$g_{ab} \ddot{q}^b + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} \right) \dot{q}^b \dot{q}^c = g_{ab} \ddot{q}^b + \Gamma_{a,bc} \dot{q}^b \dot{q}^c = 0, \quad (7.6)$$

ahonnan a

$$\Gamma_{bc}^a = g^{ad} \Gamma_{d,bc} \quad (7.7)$$

jelöléssel

$$\ddot{q}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{q}^b \dot{q}^c = \frac{D\dot{q}^a}{dt} = 0 \quad (7.8)$$

Ez a **geodetikus** egyenlete, amelyet tisztán mechanikai alapon vezetünk le. A (7.8) formula a **kovariáns derivált** definíciója metrikus térben, általános  $v^a$  vektorra a kovariáns differenciál

$$Dv^a = dv^a + \Gamma_{bc}^a dq^b v^c \quad (7.9)$$

Tömör jelöléssel

$$v^a_{;b} = v^a_{,b} + \Gamma_{bc}^a v^c, \quad (7.10)$$

86

és tenzorra indexenként (mintha vektorok diadikus szorzata lenne)

$$T_{;c}^{ab} = T_{,c}^{ab} + \Gamma_{cd}^a T^{db} + \Gamma_{cd}^b T^{ad}. \quad (7.11)$$

A (7.9) eltűnése valamely pálya mentén a **párhuzamos eltolást** definiálja, láthatjuk hát, hogy a geodetikus olyan görbe, amely mentén a sebesség párhuzamosan van eltolva. Adott pontban adott irány egyértelműen meghatározza a geodetikust.

A kovariáns differenciál nemcsak a tér megváltozását, hanem a lokális koordinátavektorok elfordulását is figyelembe veszi. A skalárszorzat megváltozása

$$\begin{aligned} d(v^a u_a) &= dv^a u_a + du_a v^a = Dv^a u_a + Du_a v^a \\ &= dv^a u_a + \Gamma_{bc}^a dq^b v^c u_a + Du_a v^a, \end{aligned} \quad (7.12)$$

ahonnan az alsóindexes vektor kovariáns differenciálja

$$Du_a = du_a - \Gamma_{ba}^c dq^b u_c = du_a - \Gamma_{c,ba} dq^b u^c. \quad (7.13)$$

A geodetikus ekvivalens egyenlete éppen (7.4)-t adja

$$\frac{D\dot{q}_a}{dt} = \ddot{q}_a - \Gamma_{c,ba} \dot{q}^b \dot{q}^c = \ddot{q}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} \dot{q}^b \dot{q}^c = 0. \quad (7.14)$$

## 7.2. Hamilton elv relativisztikus tömegpontra

A relativisztikus tömegpontra vonatkozó egyenletek az alábbi két esetben lesznek majd alkalmazhatók:

- spec.rel (SR) görbevonallú paraméterezéssel  $R_{iklm} = 0$
- ált.rel (GR), lehet  $R_{iklm} \neq 0$

Emlékeztetőként tekintsük át az alapfogalmakat:

- ívelem:  $ds$ ,  $d^2s = g_{ik} dx^i dx^k$
- sajátidő:  $d\tau = \frac{ds}{c}$
- pálya:  $x^i(\tau)$  (általában nem négyesvektor, SR-ben az)
- sebesség:  $u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \dot{x}^i$
- gyorsulás:  $\frac{Du^i}{d\tau} = w^i$
- kinematikai azonosság:  $u^i u_i = c^2$

- lokálisan együttmozgó IR-ben:

$$u_0^i = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

- lokálisan Minkowski:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

A relativisztikus tömegpont Lagrange függvénye kovariáns módon

$$L(x^i, u^i, \nu) = \underbrace{L_0(x^i, u^i)}_{\substack{\text{dinamikai} \\ \text{Lagrange függvény}}} + \frac{\nu}{2} \left( 1 - \underbrace{g_{ij} \frac{u^i u^j}{c^2}}_{\substack{\text{kinematikai} \\ \text{kényszer}}} \right), \quad (7.17)$$

89

ahol  $\nu$  Lagrange multiplikátor. A dinamikai változó az  $x^i(\tau)$  trajektória. A kanonikus impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{\partial L_0}{\partial u^i} - \frac{\nu}{c^2} u_i = p_{0i} - \frac{\nu}{c^2} u_i, \quad (7.18)$$

és az általánosított erő

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial L_0}{\partial x^i} - \frac{\nu}{2c^2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} u^j u^k = F_{0i} - \frac{\nu}{2c^2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} u^j u^k. \quad (7.19)$$

A  $u_i$  sebesség négyesvektor, ezért a  $p_i$  impulzus is az, mivel azonban  $x^i$  általában nem négyesvektor,  $F_i$  sem az. A Hamilton függvény:

$$H = p_i u^i - L = p_{0i} u^i - \nu - L_0 = E. \quad (7.20)$$

Itt  $E$  nem lehet a részecske energiája, mert emez, mint később látni fogjuk, a négyes-impulzus nulladik komponense,  $E$  pedig skalár. A Hamilton függvény időben állandó, innen  $\nu$ -re kapunk egyenletet

$$\dot{\nu} = \dot{p}_{0i} u^i + p_{0i} \dot{u}^i - \frac{\partial L_0}{\partial x^i} u^i - \frac{\partial L_0}{\partial u^i} \dot{u}^i = (\dot{p}_{0i} - F_{0i}) u^i. \quad (7.21)$$

Az ELE jelölésünkkel így írható

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (7.22)$$

90

A (7.18,7.19) felhasználásával a mozgásegyenlet

$$\frac{1}{c^2} \frac{d\nu u_i}{d\tau} - \frac{\nu}{2c^2} g_{jk,i} u^j u^k = \frac{1}{c^2} \frac{d\nu u_i}{d\tau} - \Gamma_{j,ik} \frac{\nu}{c^2} u^j u^k = \frac{1}{c^2} \frac{D\nu u_i}{d\tau} = \dot{p}_{0i} - F_{0i}, \quad (7.23)$$

ahol a jobboldal az  $L_0$ -ból származó szokásos járuléék, s a baloldalon  $\nu$ -t az időfüggése miatt a derivált alatt tartjuk. Felhasználtuk a sebesség alsóindexes kovariáns derivált (7.14) formuláját. A jobboldal tagjai (a  $p_{0i}$  nem-kovariáns időderiváltja és  $F_{0i}$ ) általában nem négyesvektorok, de összegük szükségképpen az.

Vegyük észre, hogy a kinematikai kényszer éppen olyan alakú, mint a nemrelativisztikus kinetikus energia görbevonallú koordinátarendszerben, miként azt a 7.1 részben láttuk. Ezért onnan a sebesség ( $\times \nu/c^2$ ) kovariáns deriváltja származik, ezen kívül  $\dot{p}_0$  és  $F_0$  az  $L_0$ -ból adódó szokásos járuléék.

Szorozzuk meg a

$$\frac{1}{c^2} \dot{\nu} u_i + \frac{\nu}{c^2} \frac{D u_i}{d\tau} = \dot{p}_{0i} - F_{0i} \quad (7.24)$$

mozgásegyenletet  $u^i$ -vel ill. az arra merőleges projekciós operátorral

$$\dot{\nu} = (\dot{p}_{0i} - F_{0i}) u^i \quad \leftarrow \quad u^i \text{-vel párhuzamos komponens, ez éppen (7.21)} \quad (7.25)$$

$$\frac{\nu}{c^2} \frac{D u_i}{d\tau} = (\dot{p}_{0j} - F_{0j}) \left( g_i^j - \frac{u_i u^j}{c^2} \right) \quad \leftarrow \quad u^i \text{-re merőleges komponens} \quad (7.26)$$

### 7.3. Szabad mozgás

Vizsgáljuk az állandó Lagrange-függvény esetét. A nemrelativisztikus limesszel összehasonlítva kapjuk

$$S = L_0 \int d\tau = L_0 \int_0^T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \approx L_0 T - \frac{1}{2} L_0 \int_0^T \frac{v^2}{c^2} dt, \quad (7.27)$$

ezért

$$L_0 = -mc^2, \quad (7.28)$$

ahol  $m$  a nyugalmi tömeg. A konstans tag természetesen nem befolyásolja a kovariáns mozgásegyenletet. Tehát

$$L = -mc^2 + \frac{\nu}{2} \left( 1 - \frac{g_{ij} u^i u^j}{c^2} \right), \quad (7.29)$$

ahonnan most  $p_{0i} = 0$ ,  $F_{0i} = 0$ , és az állandó

$$E = -\nu + mc^2 \quad (7.30)$$

függetlenül a kezdeti feltételtől. Választhatjuk  $E = 0$ -t, ekkor  $\nu = mc^2$ , állandó. Az ELE-ből a geodetikus egyenletét kapjuk

$$\frac{Du^i}{d\tau} = 0. \quad (7.31)$$

## 7.4. Vektorpotenciállal leírható részecske

Vizsgáljuk a következő Lagrange-függvényt

$$L_0 = -mc^2 + \frac{e}{c} A_i u^i. \quad (7.32)$$

Ahol  $A_i(x)$  vektorpotenciál és  $e$  konstans. Ekkor

$$\begin{aligned} p_{0i} = \frac{e}{c} A_i &\Rightarrow \dot{p}_{0i} = \frac{e}{c} A_{i,j} u^j, \\ F_{0i} = \frac{e}{c} A_{j,i} u^j. \end{aligned} \quad (7.33)$$

A Hamilton-függvény értékét most is vehetjük zérusnak

$$E = p_{0i} u^i - \nu - L_0 = \frac{e}{c} A_i u^i - \nu + mc^2 - \frac{e}{c} A_i u^i = -\nu + mc^2 = 0, \quad (7.34)$$

azaz a szabad részecske esetéhez hasonlóan  $\nu = mc^2$ . A mozgásegyenlet

$$m \frac{Du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} (A_{i,j} - A_{j,i}) u^j, \quad (7.35)$$

a jobboldalon a Lorentz erő áll. Valóban az  $E = 0$  adja jól az ismert nemrelativisztikus mozgásegyenletet!

## 7.5. Skalárpotenciál

A Lagrange függvény:

$$L_0 = -mc^2 - \Phi(x). \quad (7.36)$$

A potenciál egy állandó erejéig határozatlan. Az  $mc^2$  leválasztásának az adhat fizikai értelmet, ha  $mc^2 \gg \Phi$ . Az impulzus és az erő

$$p_{0i} = 0 \quad F_{0i} = -\Phi_{,i} \quad (7.37)$$

továbbá a Hamilton-függvényből  $\nu$  helyfüggőnek adódik

$$\nu = mc^2 + \Phi(x) - E, \quad (7.38)$$

$E$ -t újból zérusnak választhatjuk, ezzel a potenciál nullpontjában állítjuk be a  $\nu = mc^2$  relációt. A mozgásegyenlet

$$\frac{1}{c^2} \frac{D\nu u_i}{d\tau} = \frac{D}{d\tau} (u_i(m + c^{-2}\Phi(x))) = \Phi_{,i}, \quad (7.39)$$

avagy

$$(m + c^{-2}\Phi(x)) \frac{Du_i}{d\tau} = \Phi_{,j} \left( g_i^j - \frac{u_i u^j}{c^2} \right). \quad (7.40)$$

Látható, a potenciál effektív helyfüggő tömegként lép fel.

## 7.6. Tenzorpotenciálok

Általában a sebesség szerinti sorfejtésben magasabbdimenziós tenzorok is megjelenhetnek

$$L_0(x^i, u^i) = -mc^2 - \Phi(x) + A_i(x)u^i + B_{ij}(x)u^i u^j + C_{ijk}(x)u^i u^j u^k + \dots \quad (7.41)$$

**7.1. Házi feladat.** *A kvadratikus tagig bezárólag határozzuk meg a mozgásegyenletet. A  $\nu$ -t az  $E = 0$  feltétel mellett számítsuk. (20%)*

## 8. Térelmélet görbevonalú koordinátákkal

### 8.1. Hamilton-elv

A hatás

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,i}, x) \sqrt{-g} d^4x, \quad (8.1)$$

ahol a koordináta  $x^i$ , a dinamikai változóink a  $\phi_\alpha(x)$  terek, és feltettük, hogy magasabb deriváltjaik nem lépnek fel. A felsőindexes koordináta szerinti derivált alsóindexes,  $\phi_{\alpha,i}$ , továbbá az  $\alpha$  "könyvelési" index, skalár, vektor, stb., mennyiségeket címkézhet. Ekkor az ELE

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,i}} \sqrt{-g} \right)_{,i}. \quad (8.2)$$



Például válasszuk

$$\Lambda = \frac{1}{2} g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} \quad (8.3)$$

$$\stackrel{\text{ELE}}{\Rightarrow} 0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} (g^{ij} \sqrt{-g} \phi_{,j})_{,i} \stackrel{\text{def.}}{=} \square \phi \quad (8.4)$$

Megkaptuk a D'Alembert (és benne a Laplace) operátor görbevonallú koordinátarendszerbeli alakját tisztán mechanikai alapon!

## 8.2. Energia-impulzus tenzor

Az EIT a kanonikus definíció szerint (a  $\sqrt{-g}$ -t kiemeljük)

$$T_i^j \sqrt{-g} = \phi_{\alpha,i} \frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial \phi_{\alpha,j}} - g_i^j \Lambda \sqrt{-g}. \quad (8.5)$$

Ez azonban általában nem négyestenzor (nem "kovariáns"). Ha a  $\Lambda$  legfőbb skalárterek (nem vektorok vagy tenzorok) gradienseitől függ, akkor az EIT kovariáns. A mérlegegyenlet szintén nem kovariáns általában

$$\left( T_i^j \sqrt{-g} \right)_{,j} = - \left( \sqrt{-g} \Lambda \right)_{,i} \Big|_{\phi}. \quad (8.6)$$

97

A szemináriumon tárgyaltuk, hogyan vezethetünk be kovariáns EIT-t, ez a Hilbert-féle EIT. Ha  $\Lambda$  nem függ  $g_{ij}$  deriváltjaitól

$$T_{ij}^{\text{H}} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{ij}} - g_{ij} \Lambda. \quad (8.7)$$

Ha a  $\Lambda$  nem tartalmaz explicit koordinátafüggést a metrikus tenzorén kívül, akkor

$$T_i^{\text{H}j}{}_{;j} = 0. \quad (8.8)$$

Mivel azonban ez kovariáns divergenciát tartalmaz, általában nem következik belőle megmaradási tétel. Tekintsük példaképp

$$\Lambda = \frac{1}{2} g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j}, \quad (8.9)$$

akkor

$$T_i^j = T_{ij}^{\text{H}} = \phi_{,i} \phi^{,j} - \frac{1}{2} g_i^j \phi_{,k} \phi^{,k}, \quad (8.10)$$

a két EIT megegyezik.

**8.1. Házi feladat.** Vezessük le a  $\Lambda = \frac{1}{2} A_{i;j} A^{i;j}$ -vel adott rendszer mozgásegyenletét és számítsuk ki mindkét EIT-t. Kovariáns-e a kanonikus EIT? (20%)

### 8.3. Mérlegegyenletek

A kontinuitási egyenlet kovariáns módon a négyes áramsűrűséggel írható fel. Pillanatnyilag együttmozgó rendszerben

$$j_0^i = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow j^i = \rho u^i, \quad (8.11)$$

ahol  $\rho$  a nyugalmi sűrűség. Minkowski metrika (SR) esetén a kontinuitási egyenlet

$$j^i{}_{,i} = 0, \quad (8.12)$$

vagy komponensekre kiírva

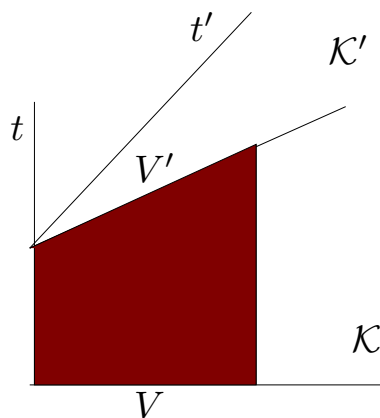
$$\frac{1}{c} j^0{}_{,t} + j^a{}_{,a} = 0. \quad (8.13)$$

A nemrelativisztikus limeszben ez visszaadja az ismert  $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0$  egyenletet. Ha a  $V$  térfogat felületén nem folyik át áram, akkor a Gauss-tétel alapján

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int j^0 dV = 0 \Rightarrow \text{tömegmegmaradás.} \quad (8.14)$$

Általánosabban

$$\int j^i{}_{,i} d^4x = \oint j^i dA_i = \underbrace{\int j'^0 dV' - \int j^0 dV}_{\text{Lorentz skalár, invariáns az időeltolásra is}} = 0 \quad (8.15)$$



16. ábra. Az ábrázolt négyes térfogatra integrálunk.

Valamely labor IR-ből  $j^0 = c\rho\gamma = c\rho_L$  és  $dV_L = \frac{dV}{\gamma}$ , és valóban

$$\int \rho_L dV_L = \text{állandó} = \int \rho\gamma \frac{dV}{\gamma} = \int \rho dV = M, \quad (8.16)$$

azaz a (nyugalmi) tömeg minden IR-ből nézve  $\int \rho dV$ , invariáns.

Görbevonallú koordinátarendszerben

$$j^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} j^i)_{,i} = 0. \quad (8.17)$$

**8.1. Gyakorló feladat.** *Mutassuk meg, hogy a kovariáns divergencia előáll a fenti közönséges divergencia alakjában a  $\Gamma$  szimbólumok  $g_{ij}$ -vel kifejezett formulájából. Ez összhangban van azzal, hogy a (8.4) D'Alembert operátor éppen a négyes értelemben vett "div grad".*

A kontinuitási egyenletet integrálva négyes térfogatra

$$\int j^i_{;i} \sqrt{-g} d^4x = \int (j^i \sqrt{-g})_{,i} d^4x = \oint \sqrt{-g} j^i dA_i. \quad (8.18)$$

Mivel felületi integrállá alakíthattuk, megmaradás következik belőle.

Vizsgáljuk az eltűnő tenzoriális divergenciát. SR-ben a

$$T_i^j{}_{;j} = 0 \quad (8.19)$$

egyenletet állandó  $a^i$ -vel szorozva vektor-kontinuitást kapunk. Ezért

$$\int a^i T_i^0 dV = \text{skalár} \quad (8.20)$$

tehát a

$$\int T_i^0 dV = 4\text{-es vektor}, \quad (8.21)$$

megmarad.

GR-ben a tenzoriális divergencia térfogati integrálját nem tudjuk felületivé alakítani, ezért a

$$T_i^j{}_{;j} = 0 \quad (8.22)$$

egyenletből általában nem következik megmaradási tétel.

## 8.4. Az ideális folyadék hidrodinamikája görbevonalú koordináta-rendszerben

Fizikai relevancia:

- SR hidrodinamika görbevonalú koordinátákkal,
- GR hidrodinamika anyagi része adott metrikával (a térre való visszahatást elhanyagoljuk).

### 8.4.1. A Lagrange sűrűség függvény

Nemrelativisztikus Lagrange sűrűség függvény (LSF):

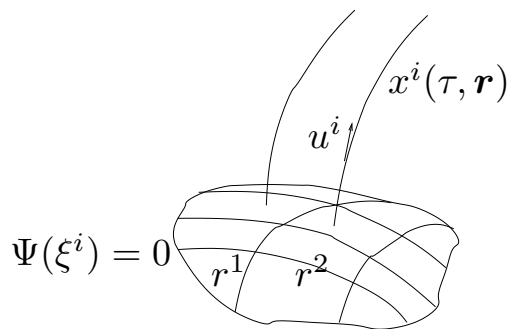
$$\Lambda = \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho\epsilon(\rho, s). \quad (8.23)$$

A GR esetben a következő LSF-ből indulunk ki

$$\Lambda = -\rho\epsilon(\rho, s) + \frac{\rho v}{2} \left( 1 - g_{ij} \frac{u^i u^j}{c^2} \right), \quad (8.24)$$

ahol  $\rho, \epsilon, s$  a pillanatnyilag együttmozgó rendszerbeli, azaz **nyugalmi sűrűség, fajlagos belső energia és entrópia**, és alkalmaztuk a kinematikai kényszert. A fajlagos energia zérus hőmérsékleten  $c^2$ , ehhez adódik a termikus. A nemrelativisztikus kinetikus energia formula az együttmozgóról az euklideszi koordinátákra való áttéréskor jelenik meg, mint azt a pontmechanikában láttuk.

Ha **Lagrange koordinátákkal** írjuk le a rendszert, akkor a dinamikai változók az  $x^i(\tau; \xi^i)$  pályák, amelyeket a kezdeti feltétellel különböztetünk meg,  $\xi^i = x^i(0; \xi^i)$ . A kezdeti koordináták egy térszerű felületen helyezkednek el, ezt kovariáns módon adhatjuk meg  $\Psi(\xi^i) = 0$ . A kezdeti felületet három skalár paraméterrel koordinátázhatjuk,  $r^a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , amelyet a könyvelés kedvéért  $\mathbf{r}$  vektorként írhatunk. A Lagrange leírásban a hatás a  $\tau, \mathbf{r}$  koordinátákra vett integrál.



17. ábra. Áramlási vonalak. A kezdeti pontok  $\xi^i$  négyes koordinátái három paraméterrel,  $\mathbf{r}$ -rel megadhatók.

Az **euleri koordinátázás** szerint a sebességtér a dinamikai változó, s az aktuális négyes pozíciót használjuk koordinátaként. Azokat a megmaradási tételket, amelyeket a lagrange-i leírás automatikusan tartalmaz, az euleri képben külső kényszerként, multiplikátorokkal kell figyelembe vennünk.

Megmaradási tétel

→ **kontinuitás**:  $(\rho u^i)_{;i} = 0$ ;

→ **adiabatikuság**:  $\dot{s} = \frac{ds}{d\tau} = s_{,i} u^i = 0$  (a relativisztikus konvektív időderivált éppen a

gradiens és a négyessebesség szorzataként adódik);

→ **kezdeti feltétel megmaradása**: az  $x^i(\tau, \mathbf{r})$  pályagörbe invertálható, azaz van olyan  $\mathbf{r}(x^i, \tau)$  függvény, amelybe az  $x^i(\tau, \mathbf{r}_0)$  pályagörbét helyettesítve időben állandót kapunk, amely éppen a pálya  $\mathbf{r}_0$  kezdeti feltétele. A három megmaradó függvény létezése éppen annak a matematikai megfogalmazása, hogy a **pályák nyalábok**. Mivel a részecskék mozgásegyenlete másodrendű differenciálegyenlet, a  $\mathbf{v}(x^i, \tau)$  kezdeti sebességek is a pályát jellemző állandók — e kérdésre később visszatérünk.

A teljes LSF a (8.24) – ezután ezt  $\Lambda_0$ -val jelöljük – és a kényszerfeltételek LSF-ének összege

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1, \quad (8.25)$$

$$\Lambda_0 = -\rho\epsilon(\rho, s) + \frac{\rho\nu}{2} \left( 1 - g_{ij} \frac{u^i u^j}{c^2} \right), \quad (8.26)$$

$$\Lambda_1 = \rho \left( \dot{\Phi} + \eta \dot{s} - \mathbf{v} \dot{\mathbf{r}} \right) = \rho \left( \Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \mathbf{v} \mathbf{r}_{,i} \right) u^i. \quad (8.27)$$

Itt  $\Phi, \eta, \mathbf{v}$  Lagrange multiplikátor terek.

NB: A kontinuitást figyelembe vehetnénk a  $-(\rho u^i)_{;i} \Phi$  kényszerfeltétellel is. Ez az ál-

talunk használt  $\rho\dot{\Phi} = \rho\Phi_{,i}u^i$  taghoz képest a hatásintegrálban csak egy (nem kovariáns) divergenciában különböző járulékot ad, a divergencia viszont felületi integrállá alakítható, ezért a két megközelítés ekvivalens térfogati mozgásegyenleteket eredményez.

### 8.4.2. Mozgásegyenletek az Euler-képben

Dinamikai terek:  $u^i, \Phi, \eta, s, \mathbf{v}, \mathbf{r}, \rho$ , hatás:  $S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d^4x$ .

$\delta u^i$ :  $\frac{\nu}{c^2} u_i = \Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \mathbf{v} \mathbf{r}_{,i}$ , a sebesség potenciálos előállítás,

$\delta \Phi$ :  $(\rho u^i \sqrt{-g})_{,i} = 0 \Rightarrow (\rho u^i)_{,i} = 0$ , kontinuitás,

$\delta \eta$ :  $\dot{s} = 0$ , adiabatikusság,

$\delta s$ :  $(\rho u^i \eta \sqrt{-g})_{,i} = -\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial s} \sqrt{-g} \Rightarrow \rho u^i \eta_{,i} \sqrt{-g} = -\rho T \sqrt{-g} \Rightarrow \dot{\eta} = -T$ ,

$\delta \mathbf{v}$ :  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ , a kezdeti feltételek "megmaradása",

$\delta \mathbf{r}$ :  $(\rho u^i \mathbf{v} \sqrt{-g})_{,i} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_{,i} u^i = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ , a kezdeti sebesség "megmaradása"

$\delta \rho$ :  $-\epsilon - \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} + \dot{\Phi} + \eta \dot{s} - \mathbf{v} \dot{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \dot{\Phi} = \epsilon + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} = \epsilon + \frac{p}{\rho} = w$ , a fajlagos entalpia.

A segédterek kezdeti feltételeit zérusnak választhatjuk

$$\Phi(0) = 0, \quad \eta(0) = 0. \quad (8.28)$$

A  $\nu$  multiplikátor maga az entalpia, ha ugyanis megszorozzuk a  $\delta u^i$  egyenletét  $u^i$ -vel

$$\nu = \dot{\Phi} + \eta \dot{s} - \mathbf{v} \dot{\mathbf{r}} = w. \quad (8.29)$$

A pálya mentén a LSF értéke a nyomás

$$\Lambda = \rho \left( -\epsilon + \dot{\Phi} \right) = \rho (w - \epsilon) = p. \quad (8.30)$$

### 8.4.3. A GR Euler egyenlet

A variációs egyenletek felhasználásával megkaphatjuk a nemrelativisztikus Euler egyenlet GR általánosítását.

$$\frac{1}{c^2} \frac{D w u_i}{d\tau} = \frac{1}{c^2} (w u_i)_{,j} u^j = (\Phi_{,i;j} + \eta s_{,i;j} - \mathbf{v} \mathbf{r}_{,i;j}) u^j - T s_{,i}, \quad (8.31)$$

mert  $\dot{\mathbf{v}} = 0$  és  $\dot{\eta} = -T$ . Kihhasználjuk, hogy skalár mennyiség kovariáns gradiens tenzora szimmetrikus és  $dw = Tds + dp/\rho$

$$\frac{1}{c^2} \frac{Dwu_i}{d\tau} = -Ts_{,i} + (\Phi_{,j;i} + \eta s_{,j;i} - \mathbf{v}\mathbf{r}_{,j;i}) u^j \quad (8.32)$$

$$= -Ts_{,i} + \dot{\Phi}_{,i} + \eta \dot{s}_{,i} - \mathbf{v}\dot{\mathbf{r}}_{,i} - (\Phi_{,j} + \eta s_{,j} - \mathbf{v}\mathbf{r}_{,j}) u^j_{,i} \quad (8.33)$$

$$= -Ts_{,i} + w_{,i} - \frac{w}{c^2} u_j u^j_{,i} = \frac{p_{,i}}{\rho}. \quad (8.34)$$

Ez a nemrelativisztikus Euler egyenlet természetes általánosítása, azzal a kiegészítéssel, hogy a tehetetlen tömegsűrűség helyén az entalpia jelenik meg! Szétbontva

$$\frac{1}{c^2} \frac{Dwu_i}{d\tau} = \frac{\dot{w}}{c^2} u_i + \frac{w}{c^2} \frac{Du_i}{d\tau} = \frac{p_{,i}}{\rho}. \quad (8.35)$$

A sebességgel párhuzamos komponens  $\dot{w} = \frac{\dot{p}}{\rho}$ , ez éppen az adiabacitási feltétel, a sebességre merőleges pedig

$$\frac{w}{c^2} \frac{Du_i}{d\tau} = \frac{p_{,j}}{\rho} \left( g_i^j - \frac{u_i u^j}{c^2} \right). \quad (8.36)$$

#### 8.4.4. Energia-impulzus tenzorok

→ Kanonikus EIT: a  $\Lambda$ -ban (első) deriváltjaikkal fellépő mennyiségek a  $\Phi, s, r^a$  skalárok, a deriváltak lineárisan jelennek meg

$$T_i^j = \varphi_{\alpha,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi_{\alpha,j}} - g_i^j \Lambda = \rho (\Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \mathbf{v}\mathbf{r}_{,i}) u^j - g_i^j p \quad (8.37)$$

$$= \rho \frac{w}{c^2} u_i u^j - g_i^j p, \quad (8.38)$$

szimmetrikus és kovariáns.

→ Hilbert EIT:

$$T^{Hij} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g_{ij}} - g^{ij} \Lambda = \rho \frac{w}{c^2} u^i u^j - g^{ij} p. \quad (8.39)$$

A két tenzor azonos!

#### 8.4.5. Izotróp expanszió

Tekintsük azt az SR problémát, amikor egy folyadékgömb adiabatikusan tágul. Történhet-e ez időfüggetlen sebességtérrel, azaz megoldja-e ilyen az EE-et? Hogyan

csökken a sűrűség az időben?

Tegyük fel, hogy a folyadékelemek trajektóriája a sajátidőben lineáris

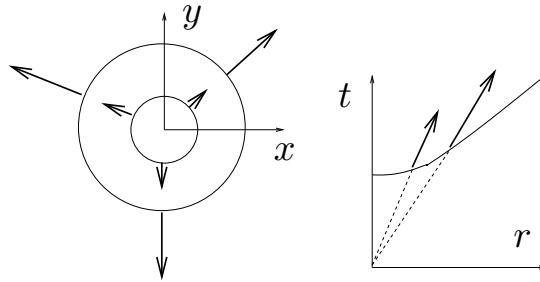
$$x^i = \tau u^i(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx^i}{d\tau} = u^i(\mathbf{r}), \quad (8.40)$$

ahol  $\mathbf{r}$  a kezdeti ( $\tau = 1$ -beli) feltételeket parametrizálja. A sebességtér a sajátidőtől nem, csak a kezdeti feltételektől függ. Legyen  $c = 1$ , ekkor

$$\sqrt{x_i x^i} = \tau \sqrt{u_i u^i} = \tau \quad \Rightarrow \quad \tau_{,i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_j x^j}} = u_i. \quad (8.41)$$

Lehetséges parametrizáció  $u_i u^i = 1$  mellett

$$u^i(\mathbf{r}) = (\cosh \eta, \sinh \eta \cos \varphi \sin \vartheta, \sinh \eta \sin \varphi \sin \vartheta, \sinh \eta \cos \vartheta). \quad (8.42)$$



18. ábra. Az elmozdulástér valós térben (bal) és a  $t - r$  síkban (jobb). A  $\tau = \text{const}$  görbék a térben gömbök, a  $t - r$  síkban hiperbolák.

Az Euler egyenlet sebességre normális vetülete

$$w \frac{\partial u_i}{\partial \tau} = \left( g_i^j - u_i u^j \right) p_{,j}, \quad (8.43)$$

ahol most  $w$  az entalpiasűrűség, a korábbi  $\rho w$ . Tegyük fel, hogy a kezdeti nyomás homogén volt, s keressük a megoldást csak a sajátidőtől függő  $p = p(\tau)$  alakban. Mivel

$$p(\tau)_{,i} = \dot{p} \tau_{,i} = \dot{p} u_i, \quad (8.44)$$

azért az Euler egyenlet jobboldala eltűnik. Tehát az időben állandó sebességtér valóban



kielégíti az Euler egyenletet!

Kontinuitás

$$0 = (\varrho u^i)_{,i} = \varrho_{,i} u^i + \varrho u^i_{,i} \Rightarrow u^i_{,i} = -\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}. \quad (8.45)$$

A sebességtér divergenciája

$$u^i_{,i} = \left( \frac{x^i}{\tau} \right)_{,i} = \frac{4}{\tau} - \frac{x^i \tau_{,i}}{\tau^2} = \frac{4}{\tau} - \frac{u_i u^i}{\tau} = \frac{3}{\tau}. \quad (8.46)$$

A sűrűség differenciála tehát

$$\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -\frac{3}{\tau} \Rightarrow \varrho \propto \tau^{-3}. \quad (8.47)$$

Az energiasűrűségre

$$\dot{e} = w \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -\frac{3}{\tau}(e + p), \quad (8.48)$$

ha mármost ultrarelativisztikus állapotegyenletet,  $e = 3p$ , tételezünk fel, akkor

$$\frac{\dot{e}}{e} = -\frac{4}{\tau} \Rightarrow e \propto \tau^{-4}. \quad (8.49)$$

Az  $e \propto T^4$  Stefan-Boltzmann reláció alapján a hőmérséklet csökkenése  $T \propto \tau^{-1}$ .

**8.2. Házi feladat.** *Mutassuk meg, hogy az EIT divergenciájának eltűnése ekvivalens az Euler egyenlettel. (15%)*

**8.3. Házi feladat.** *Állítsunk fel csak sebességpotenciálokat tartalmazó variációs elvet. Emlékeztetünk arra, hogy  $w u_i/c^2 = \Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \mathbf{v} \mathbf{r}_{,i}$ , továbbá a LSF a pálya mentén a nyomás. Legyen ismert az állapotegyenlet  $p = p(w, s)$  és tekintsük a*

$$\Lambda = p(c|\Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \mathbf{v} \mathbf{r}_{,i}|, s) \quad (8.50)$$

*LSF-t. Írjuk fel a mozgásegyenleteket és az EIT-et. (40%)*

**8.4. Házi feladat.** *Dolgozzuk ki a GR hidrodinamika variációs elméletét Lagrange koordinátákkal. Célszerű előbb átgondolni a korábban bemutatott nemrelativisztikus tárgyalást, majd ezt relativisztikusan átfogalmazni. (Előre beadandó, 80%.)*

**8.5. Házi feladat.** *SR-ben  $T_i^j{}_{,j} = 0$ . Mutassuk meg, hogy kis sebességek esetén, labor rendszerben, az ismert nemrelativisztikus egyenleteket kapjuk vissza. (15%)*

## 9. Az elektromágneses tér mint klasszikus térelmélet

### 9.1. Térerősség tenzor

A potenciálellőállítás a vákuumegyenleteket automatikusan teljesíti (közeg nélkül  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} &\Rightarrow \nabla \mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi &\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Négyes írásmód

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{pmatrix} \varphi \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \\ E_a &= A_{a,0} - A_{0,a} \\ H_a &= \varepsilon_{abc} A_{b,c} \end{aligned} \quad (9.2)$$

### A térerősség tenzor

$$F_{ij} = A_{j;i} - A_{i;j} = A_{j,i} - A_{i,j}, \quad (9.3)$$

részletesen

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{ji} \quad (9.4)$$

azaz, ha  $i, j = 0 \dots 3$  és  $a, b = 1, 2, 3$

$$F_{0a} = E_a, \quad (9.5)$$

$$F_{ab} = -\varepsilon_{abc} H_c. \quad (9.6)$$

A kovariáns derivált formulája alapján belátható, hogy

$$A_{j;i;k} - A_{i;j;k} + A_{i;k;j} - A_{k;i;j} + A_{k;j;i} - A_{j;k;i} = 0. \quad (9.7)$$

**9.1. Gyakorló feladat.** *Vezessük le a fenti azonosságot.*

Innen

$$F_{ij;k} + F_{jk;i} + F_{ki;j} = 0 \iff \varepsilon^{ijkl} F_{ij;k} = 0, \quad (9.8)$$

ahol  $\varepsilon^{ijkl}$  a Levi-Civita szimbólum. Ez az azonosság azzal van kapcsolatban, hogy adott pontban a tér Minkowski-ba transzformálható. Bevezetve a

$$\bar{F}^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijkl} F_{kl} \quad (9.9)$$

duális tenzort, a következő egyszerű egyenletet kapjuk

$$\bar{F}^{ij}{}_{;j} = 0. \quad (9.10)$$

**9.1. Házi feladat.** *Mutassuk meg, hogy (9.10) éppen a két vákuum egyenletet adja. (15%)*

## 9.2. Hamilton elv a potenciálokra

A ME-ek lineárisak, ezért a LSF kvadratikus. Az egyetlen kvadratikus valódi skalár

$$\Lambda_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} = \frac{E^2 - H^2}{8\pi}, \quad (9.11)$$

ahol a második formula Minkowski térben érvényes.

**9.2. Gyakorló feladat.** *Írjuk fel a LSF-t általános metrika esetén a terekkel. Ehhez használjuk fel, hogy a térerősség tenzor alsó indexes komponenseit definiáltuk az  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{H}$  komponenseivel.*

Az LSF-ben a  $-1/16\pi$  prefaktort az anyagi egyenletekhez való későbbi illesztés céljából írtuk. A hatás tetszőleges görbevonallú koordinátákkal

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda_{\text{EM}} \sqrt{-g} d^4x. \quad (9.12)$$

A dinamikai változó az  $A_i(x)$  tér. Variálásához először számítsuk ki az  $A_{i,j}$  szerinti deriváltat

$$\frac{\partial \Lambda_{\text{EM}}}{\partial A_{i,j}} = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \frac{\partial F_{kl}}{\partial A_{i,j}} = -\frac{1}{4\pi} F^{ji}, \quad (9.13)$$

ahonnan

$$0 = \frac{\delta S}{\delta A_i} \Rightarrow 0 = \frac{1}{4\pi} (F^{ij} \sqrt{-g})_{;j} \frac{1}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{4\pi} F^{ij}_{;j}. \quad (9.14)$$

Az utolsó azonosság **csak antiszimmetrikus tenzor kovariáns divergenciájára igaz!**

**9.3. Gyakorló feladat.** *Mutassuk meg, hogy antiszimmetrikus tenzor kovariáns divergenciája valóban előáll a fenti közönséges divergencia alakjában.*

Ez éppen a második ME pár (az anyagi egyenletek vákuumban), SR-ben  $i = 0$  mellett kapjuk  $\nabla \mathbf{E} = 0$ , míg  $i = 1, 2, 3$ -ra  $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ . GR-ben az anyagi egyenletekben megjelennek a Christoffel-szimbólumok.

A ME-eket vákuumban a következő szimmetrikus alakban kaptuk

$$F^{ij}_{;j} = 0, \quad \bar{F}^{ij}_{;j} = 0. \quad (9.15)$$

### 9.3. Hamilton-elv a térerősségekre

Felmerülhet a kérdés, miért nem tekintettük az  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{H}$  tereket, amelyek a mérhető fizikai mennyiségek, dinamikai változóknak. Az összes ME-et hat változó variálásából nem kaphatjuk meg, nyilván mellékfeltételeket kell kirónunk.

#### 9.3.1. A vákuum egyenletek, mint kényszerek

Adjuk az előző LSF-hez hozzá a vákuum egyenleteket kényszerfeltételként előállító alábbi tagot

$$\bar{\Lambda}_K = \frac{1}{8\pi} \bar{F}^{kl}_{;k} \bar{A}_l = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{ijkl} F_{ij;k} \bar{A}_l = \frac{1}{8\pi \sqrt{-g}} \varepsilon^{ijkl} (\sqrt{-g} F_{ij})_{;k} \bar{A}_l, \quad (9.16)$$

ahol  $\bar{A}_l$  multiplikátor tér. A  $\Lambda_{EM} + \bar{\Lambda}_K$  teljes LSF-t a térerősségek szerint variálva a hiányzó egyenletek adódnak (a  $_{;k}$  helyébe  $_{;k}$  is írható az antiszimmetrikus tenzorral szorzás okából)

$$\begin{aligned} (\delta F_{ij}) : \quad & -\frac{1}{16\pi} 2 \cdot 2 F^{ij} = \frac{1}{8\pi} 2 \varepsilon^{ijkl} \bar{A}_{l,k} \\ \Rightarrow \quad & F^{ij}_{;j} = 0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Az antiszimmetria következménye az extra 2 faktor, a második sor a (9.7) vektoranalitikai azonosságból származik.

Vegyük észre, hogy az  $\bar{A}_i$  tér éppen a duális tenzor vektorpotenciálja!

### 9.3.2. Az anyagi egyenletek, mint kényszerek

Megfordítva, vezessük le a vákuum egyenleteket, az anyagiakat kényszernek tekintve:

$$\Lambda_K = \frac{1}{4\pi} F_{ij}{}^{;j} A^i \quad (9.18)$$

$$(\delta F_{ij}) : \quad -\frac{1}{4\pi} F^{ij} = \frac{1}{4\pi} (A^{i,j} - A^{j,i}).$$

Azaz  $A_i$  éppen a vektorpotenciál, innen a vákuum egyenletek következnek.

Tanulság: A Hamilton-elv nem egyértelmű, hasonlóan ahhoz, amit a hidrodinamikai példákban láttunk. Az összes mozgásegyenletet nem tudjuk származtatni, ezért el kell döntenünk, mit tekintünk előzőleg ismertnek és mit kívánunk levezetni, s a hatásfunkcionált ennek megfelelően kell megválasztanunk.

### 9.4. Az energia-impulzus tenzor

A Hilbert-féle EIT (mivel a LSF nem függ  $g_{ij}$  deriváltjaitól)

$$T_{ij}^H = 2 \frac{\partial \Lambda_{EM}}{\partial g^{ij}} - g_{ij} \Lambda_{EM} = -\frac{1}{4\pi} F_{ik} F_j{}^k + g_{ij} \frac{F_{kl} F^{kl}}{16\pi}. \quad (9.19)$$

A kanonikus EIT

$$T_i{}^j = A_{k,i} \frac{\partial \Lambda_{EM}}{\partial A_{k,j}} - g_i{}^j \Lambda_{EM} = -\frac{1}{4\pi} A_{k,i} F^{jk} + g_i{}^j \frac{F_{kl} F^{kl}}{16\pi}. \quad (9.20)$$

Vizsgáljuk a két tenzor különbségét, amely  $\tilde{T}_i{}^j = A_{i,k} F^{jk}$ -val arányos. Mivel  $F^{jk}{}_{;k} = 0$  a pálya mentén, azért

$$\tilde{T}_i{}^j = \tilde{T}_i{}^j + A_i F^{jk}{}_{;k} = \tilde{T}_i{}^j + \frac{A_i}{\sqrt{-g}} (F^{jk} \sqrt{-g})_{,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (A_i F^{jk} \sqrt{-g})_{,k} \quad (9.21)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \tilde{T}_i{}^j \sqrt{-g} \right)_{,j} = 0. \quad (9.22)$$

Éppen a fenti alakú, nem-kovariáns "divergencia" jelenik meg a kanonikus EIT (8.6) mérlegegyenletében. Tehát a  $\tilde{T}/4\pi$  tenzort a kanonikus EIT-hez adva a mérlegegyenlet

nem változik, ezért tekinthetjük az alábbi tenzort kanonikus EIT-nek

$$T_i^j = -\frac{1}{4\pi} F_{ik} F^{jk} + g_i^j \frac{F_{kl} F^{kl}}{16\pi}. \quad (9.23)$$

Ez szimmetrikus, kovariáns, s megegyezik a Hilbert-féle EIT-vel! A szokásos jelöléssel

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} u & \frac{1}{c} \mathbf{j}_u \\ c\mathbf{p} & \sigma \end{pmatrix}, \quad (9.24)$$

részletesen kiírva Minkowski térben

$$\begin{aligned} T^{00} &= -\frac{1}{4\pi} F_a^0 F^{0a} - \Lambda_{\text{EM}} = \frac{E^2}{4\pi} + \frac{H^2 - E^2}{8\pi} = \frac{H^2 + E^2}{8\pi} = u, \\ T^{a0} &= -\frac{1}{4\pi} F^{ab} F_b^0 = \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{abc} H_c E_b = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_a = \frac{1}{c} \mathbf{j}_{ua} = cp_a, \\ T^{ab} &= -\frac{1}{4\pi} F_k^a F^{bk} + \delta_{ab} \Lambda_{\text{EM}} = \delta_{ab} u - \frac{E_a E_b + H_a H_b}{4\pi} = \sigma_{ab}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

A  $\sigma$  a Maxwell-féle feszültség tenzor, a  $\mathbf{j}_u = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  a Poynting vektor.

**9.2. Házi feladat.** *Mutassuk meg a ME-ek alapján, hogy  $T^{ij}_{;j} = 0$  (15%). Ezt természetesen tudjuk a Hilbert-féle tenzorról, itt expliciten meg kell mutatni.*

**9.3. Házi feladat.** *Általában mikor teljesül a Hilbert tenzorra is a kanonikus tenzorra vonatkozó mérlegegyenletet? (15%). (A hidrodinamikai és elektromágneses térelméletekben teljesült.)*

## 9.5. Tér és anyag kölcsönhatása

### 9.5.1. Adott pályájú azonos töltések

$$\Lambda = \Lambda_{\text{EM}} + \Lambda_{\text{I}}, \quad (9.26)$$

ahol a (nyugalmi) térfogategységre eső részecskeszámot  $n$ -nel jelölve

$$\Lambda_{\text{I}} = -\frac{e}{c} n u^i A_i = -\frac{1}{c} j^i A_i. \quad (9.27)$$

Az együtthatót az indokolja, hogy  $-\frac{1}{c} j^0 A_0 = -\rho\varphi$ , a sztatikus potenciális energiasűrűség  $-1$ -szerese. A variáció (9.14) alapján

$$(\delta A_i) : -\frac{1}{4\pi} F^{ij}_{;j} - \frac{1}{c} j^i = 0, \quad (9.28)$$

$$\Rightarrow F^{ij}{}_{;j} = -\frac{4\pi}{c}j^i. \quad (9.29)$$

Ezek éppen az anyagi ME-ek. A  $\Lambda_{\text{EM}}$ -ben korábban definiált  $-1/16\pi$  együtthatót tehát jól választottuk.

A kovariáns anyagi egyenlettel a kontinuitás összhangban van

$$-\frac{4\pi}{c}j^i{}_{;i} = F^{ij}{}_{;j;i} = \left( \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{ij})_{,j} \right)_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{ij})_{,i,j} = 0. \quad (9.30)$$

A labor rendszerben az elektromos áramsűrűség

$$j^i = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}, \quad (9.31)$$

és Minkowski térben a szokásos formulákat kapjuk

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\boldsymbol{\rho}, \quad (9.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (9.33)$$

### 9.5.2. Adott térben mozgó töltés

Korábban vizsgáltuk az anyagi Lagrange függvényt

$$L_A + L_I = -mc^2 + \frac{\nu}{2} \left( 1 - g_{ij} \frac{u^i u^j}{c^2} \right) - \frac{e}{c} u^i A_i. \quad (9.34)$$

Mint korábban láttuk,  $\nu = mc^2$ , s (7.35) alapján

$$m \frac{Du_i}{d\tau} = -\frac{e}{c} (A_{i,j} - A_{j,i}) u^j = \frac{e}{c} F_i{}^j u_j, \quad (9.35)$$

ez a Lorentz erőtvény. Használva az  $u^i = (c\gamma, \mathbf{v}\gamma)$  alakot,  $\gamma$ -val egyszerűsítés után Minkowski térben a szokásos formulát kapjuk

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (9.36)$$

### 9.5.3. Tér és anyag kölcsönható dinamikája

$$\Lambda = \Lambda_{\text{EM}} + \Lambda_{\text{I}} + \Lambda_{\text{A}} + \Lambda_{\text{K}}, \quad (9.37)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\text{EM}} &= -\frac{1}{8\pi}(A_{i;j} - A_{j;i})A_{k;l}g^{ik}g^{jl} \\
\Lambda_{\text{I}} &= -\frac{e}{c}nu^i A_i \\
\Lambda_{\text{A}} &= -nmc^2 + \frac{n\nu}{2} \left(1 - g_{ij} \frac{u^i u^j}{c^2}\right) \\
\Lambda_{\text{K}} &= n(\dot{\phi} - \mathbf{v}\dot{\mathbf{r}}).
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Az anyagi részt termodinamika nélküli töltött porfelhőnek tekintjük (ütközésmentes plazma),  $T = 0$ ,  $p = 0$ ,  $\varepsilon = c^2 = w$ . A dinamikai mezők  $u^i, A_i, n, \nu, \phi, \mathbf{v}, \mathbf{r}$ , mint azt korábban a hidrodinamika variációs elvénél tárgyaltuk. Mivel  $T = 0$ , entropikus tag nem lép fel. Az egyszerűség kedvéért egynemű részecskéket tekintünk, ezeket az  $n$  részecskeszám sűrűséggel írjuk le, a tömegsűrűség  $mn$ , a töltéssűrűség  $en$ , az anyagi és elektromos kontinuitás egyenértékű.

127

ELE:

$$\begin{aligned}
(\delta A_i) : & \quad F^{ij}{}_{;j} = -\frac{4\pi}{c}j^i \\
(\delta \phi) : & \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}nu^i)_{;i} = (nu^i)_{;i} = 0 \quad \text{kontinuitás} \\
(\delta \mathbf{v}) : & \quad \dot{\mathbf{r}} = 0 \\
(\delta \mathbf{r}) : & \quad \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad (\delta \phi)\text{-t felhasználva} \\
(\delta u^i) : & \quad \frac{\nu}{c^2}u_i = -\frac{e}{c}A_i + \phi_{,i} - \mathbf{v}\mathbf{r}_{,i} \quad \text{sebességpotenciál} \\
(\delta n) : & \quad -mc^2 - \frac{e}{c}u^i A_i + \dot{\phi} = 0 \quad \rightarrow \quad \nu = mc^2
\end{aligned} \tag{9.39}$$

Könnyen megmutatható, hogy összhangban a pontmechanikai eredménnyel

$$m \frac{Du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_i{}^j u_j, \tag{9.40}$$

vagy  $n$ -el szorozva

$$mn \frac{Du_i}{d\tau} = \frac{1}{c} F_i{}^j j_j. \tag{9.41}$$

128



**9.4. Házi feladat.** Vezessük le a relativisztikus magnetohidrodinamika mozgásegyenleteit ideális folyadéokra. (35%) (Útmutatás: az anyagi Lagrange függvény legyen mínusz a belső energia.)

#### 9.5.4. Energia impulzus tenzor

$\Lambda_I$  nem ad járulékot, azaz az EIT az anyag és tér EIT-ainak összege. Mivel  $p = 0$ , azért

$$T_{ij} = mn u_i u_j + \frac{g_{ij}}{16\pi} F^{kl} F_{kl} - \frac{1}{4\pi} F_{ik} F_j{}^k. \quad (9.42)$$

**9.5. Házi feladat.** Mutassuk meg, hogy a Lorentz erőtvényből következik  $T^{ij}{}_{;j} = 0$ . (15%)

#### 9.5.5. Mértékinvariancia

Vegyük észre, hogy az  $A_i + \varphi_{,i} \rightarrow A_i$  és  $\phi + \frac{e}{c}\varphi \rightarrow \phi$  helyettesítésre a  $-\frac{e}{c}A_i u^i + \dot{\phi}$  tag, s ezért a teljes LSF invariáns. Innen látszik, hogy a mértékinvariancia a töltésmegmaradással áll kapcsolatban, hiszen a  $\phi$  segédteret a kontinuitás miatt vettük fel. Rögzítsük

129

a mértéket úgy, hogy a „régii” vektorpotenciállal teljesüljön

$$\square\varphi = \varphi_{,i}{}^{;i} = -A_i{}^{;i}, \quad (9.43)$$

ebből következően az új  $A_i$  divergenciamentes — ez a **Lorentz mérték**. További szabadsági fokunk is maradt, ugyanis a  $\square\varrho = 0$ -t kielégítő additív  $\varrho$  tér erejéig  $\varphi$  határozatlan. Ezt rögzítheti az, ha a határon nem változtatjuk a vektropotenciált, azaz ott  $\varphi_{,i}$  eltűnik.

#### 9.5.6. Hullámegyenlet görbült téridőben

Idézzük fel a Riemann és Ricci tenzorokról

$$V^i{}_{;j;k} - V^i{}_{;k;j} = R^i{}_{mjk} V^m, \quad (9.44)$$

$$R^j{}_{ikj} = -R_{ik}. \quad (9.45)$$

Az anyagi ME-ekből

$$F_i{}^j{}_{;j} = -\frac{4\pi}{c} j_i = A^j{}_{;i;j} - A_i{}^{;j}{}_{;j} = A^j{}_{;j;i} + R^j{}_{kij} A^k - A_i{}^{;j}{}_{;j}. \quad (9.46)$$

130

Lorentz mértékben  $A^j_{;j} = 0$ , innen a kovariáns hullámgyengeletet kapjuk

$$\square A_i + R_i{}^k A_k = \frac{4\pi}{c} j_i. \quad (9.47)$$

Töltésmentes térben, gyenge gravitáció mellett

$$\square A_i = 0. \quad (9.48)$$

A megoldás

$$A_i(x) = a_i(k_j x^j), \quad \text{ahol } k_i k^i = 0 \quad (9.49)$$

**9.6. Házi feladat.** Írjuk fel az eikonál egyenletet görbült térben, azaz keressük a hullámgyengelet megoldását  $A_j = a_j e^{iS(x)}$  alakban, feltéve, hogy  $S$  lassan változik. (15%)

## 10. Az elektromágneses tér speciális relativisztikus tulajdonságai

### 10.1. Kvadratikusan invariánsok

A térerősség tenzorból két kvadratikusan invariáns származtatható

$$\frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} = H^2 - E^2 \quad \text{illetve,} \quad -\frac{1}{4} \varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \quad (10.1)$$

Az első mennyiség skalár, a második pszeudoskalár mivel egy axiálvektor és egy polárvektor skaláris szorzata, és ezért tértükrözésnél előjelet vált. A fenti két mennyiség invarianciájának következményeit a téridő valamely adott pontjában az alábbiakban foglaljuk össze.

- Ha van olyan IR, ahol  $E = H$  és  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , akkor ez minden IR-ben fennáll.
- Ha  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , és  $E \neq H$  akkor megengedett, hogy

ha  $H > E \Rightarrow$  létezzék IR, hogy  $E = 0$

ha  $E > H \Rightarrow$  létezzék IR, hogy  $H = 0$

– Ha  $\mathbf{EH} \neq 0$  akkor létezik IR, hogy  $H \parallel E$

Ha  $H \parallel E \parallel \mathbf{n}_x$ , akkor

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Ha tehát  $\mathbf{EH} \neq 0$ , akkor  $T_{ij}$ -t Lorentz-transzformáció diagonalizálja, és pedig olyan IR-be vivő transzformáció, amelyben a két tér párhuzamos valamely koordinátatengellyel.

## 10.2. A térerősségek Lorentz transzformáltja

Idézzük fel az  $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$  irányú „boost” Lorentz transzformációjának mátrixát

$$\Lambda^i_j(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \text{ch}\beta & -n\text{sh}\beta \\ -n\text{sh}\beta & \mathbf{I} + (\text{ch}\beta - 1)\mathbf{n} \circ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \quad (10.3)$$

amely szerint négyesvektorokra

$$\begin{aligned} a'^i &= \Lambda^i_j(\mathbf{v})a^j, \\ a^i &= \Lambda^i_j(-\mathbf{v})a'^j. \end{aligned} \quad (10.4)$$

A térerősség tenzor transzformációja (a  $\Lambda = \Lambda(-\mathbf{v})$  jelöléssel)

$$F'^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_l F'^{kl}. \quad (10.5)$$

Az elektromos tér transzformációja

$$\begin{aligned}
E_a &= F^{a0} = \Lambda^a_k \Lambda^0_l F'^{kl} = \\
&= -\underbrace{\Lambda^a_0 \Lambda^0_b E'_b}_{(k,l)=(0,b)} + \underbrace{\Lambda^a_b \Lambda^0_0 E'_b}_{(k,l)=(b,0)} - \underbrace{\Lambda^a_b \Lambda^0_c \varepsilon_{bcd} H'_d}_{(k,l)=(b,c)} \\
&= (-n_a n_b \text{sh}^2 \beta + \text{ch} \beta [\delta_{ab} + (\text{ch} \beta - 1) n_a n_b]) E'_b - \\
&\quad - n_c \text{sh} \beta (\delta_{ab} + (\text{ch} \beta - 1) n_a n_b) \varepsilon_{bcd} H'_d = \\
&= (\text{ch} \beta \delta_{ab} + n_a n_b (1 - \text{ch} \beta)) E'_b - \text{sh} \beta \varepsilon_{acd} n_c H'_d.
\end{aligned} \tag{10.6}$$

A  $\mathbf{H}$ -ra vonatkozó transzformációt közvetlen számítással, de a  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$  és  $-\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$  helyettesítéssel is megkaphatjuk. Ez utóbbi annak felel meg, hogy (10.6) számítást a duális  $\bar{F}$  tenzorral végezzük. Összegezve

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= (\text{ch} \beta \mathbf{I} - (\text{ch} \beta - 1) \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \mathbf{E}' - \text{sh} \beta \mathbf{n} \times \mathbf{H}', \\
\mathbf{H} &= (\text{ch} \beta \mathbf{I} - (\text{ch} \beta - 1) \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \mathbf{H}' + \text{sh} \beta \mathbf{n} \times \mathbf{E}'.
\end{aligned} \tag{10.7}$$

135

A boost irányába eső ill. arra merőleges komponenseket kiírva

$$\begin{aligned}
\mathbf{nE} &= \mathbf{nE}', \\
\mathbf{nH} &= \mathbf{nH}', \\
\mathbf{E}_\perp &= \text{ch} \beta \mathbf{E}'_\perp - \text{sh} \beta \mathbf{n} \times \mathbf{H}'_\perp, \\
\mathbf{H}_\perp &= \text{ch} \beta \mathbf{H}'_\perp + \text{sh} \beta \mathbf{n} \times \mathbf{E}'_\perp.
\end{aligned} \tag{10.8}$$

A boost irányú komponensek nem változnak!

### 10.3. Példák

- $x$  irányú boost

Ha  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ , akkor

$$\begin{aligned}
E_1 &= E'_1, \\
E_2 &= \text{ch} \beta E'_2 + \text{sh} \beta H'_3, \\
E_3 &= \text{ch} \beta E'_3 - \text{sh} \beta H'_2,
\end{aligned} \tag{10.9}$$

136

$$\begin{aligned}
H_1 &= H'_1, \\
H_2 &= \operatorname{ch}\beta H'_2 - \operatorname{sh}\beta E'_3, \\
H_3 &= \operatorname{ch}\beta H'_3 + \operatorname{sh}\beta E'_2.
\end{aligned}
\tag{10.10}$$

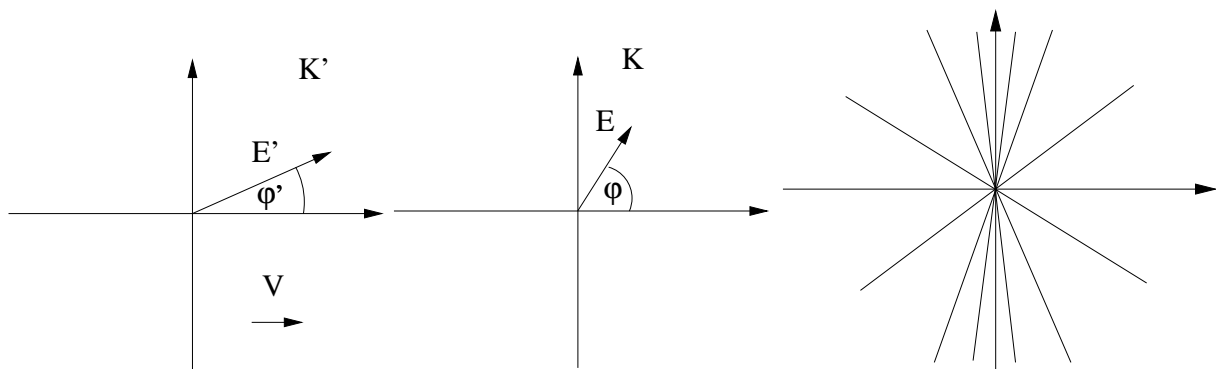
• Szögek Lorentz transzformációja

Legyen a boost  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$  irányú, s a  $\mathcal{K}'$ -ben a mágneses tér zérus.

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{E'_2}{E'_1} \tag{10.11}$$

A térerősségek transzformációja alapján:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\operatorname{ch}\beta E'_2}{E'_1} = \operatorname{ch}\beta \operatorname{tg}\varphi'. \tag{10.12}$$



19. ábra. A térerősségek által bezárt szög transzformációja. A  $\mathcal{K}'$ -vel mozgó ponttöltés centrális erőtere a  $\mathcal{K}$ -ből nézve a sebességre merőleges síkban sűrűsödni látszik. (Az első két ábrát összehasonlítva hibát fedezhetünk fel: mit ábrázoltunk rosszul?)

• Mi a fizikai jelentése a sebesség dimenziójú  $\mathbf{S}/u$  mennyiségnek?

Tegyük fel, hogy  $\mathbf{E}\mathbf{H} \neq 0$ , azaz  $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ . Alkalmazzunk olyan boost-ot, amely párhuzamossá transzformálja a tereket,  $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$ , ehhez elég az  $\mathbf{n} \perp \mathbf{H}'$  komponenst

megtalálni, mert újabb  $\parallel$  irányú boost a tereket már nem változtatja.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{ch}\beta \mathbf{E}' - \text{sh}\beta \mathbf{n} \times \mathbf{H}' \\ \mathbf{H} &= \text{ch}\beta \mathbf{H}' + \text{sh}\beta \mathbf{n} \times \mathbf{E}' \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{H} &= \text{ch}\beta \text{sh}\beta (\mathbf{E}' \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}') + \mathbf{H}' \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}')) \\ &= \text{ch}\beta \text{sh}\beta \mathbf{n} (E'^2 + H'^2) \end{aligned} \quad (10.14)$$

$$\begin{aligned} E^2 + H^2 &= \text{ch}^2\beta E'^2 + \text{sh}^2\beta H'^2 + \text{ch}^2\beta H'^2 + \text{sh}^2\beta E'^2 = \\ &= (\text{ch}^2\beta + \text{sh}^2\beta)(E'^2 + H'^2) \end{aligned} \quad (10.15)$$

Ebből:

$$\frac{\mathbf{S}}{u} = c\mathbf{n} \frac{2\text{ch}\beta \text{sh}\beta}{\text{ch}^2\beta + \text{sh}^2\beta} = c\mathbf{n} \text{th}2\beta \quad (10.16)$$

Az  $\mathbf{S}/u$  semmilyen fizikai mennyiség áramlási sebességét nem jelenti, hiszen nem négyesvektor térbeli része! Mégis van fizikai jelentése: a hozzá tartozó sebességparaméter fele jellemzi annak az IR-nek a relatív sebességét, amelyből a terek párhuzamosnak látszanak.

- Doppler-effektus

Vizsgáljuk meg egy  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó részecske által kibocsátott fény frekvenciáját! A hullámot a négyes hullámszámvektor jellemzi

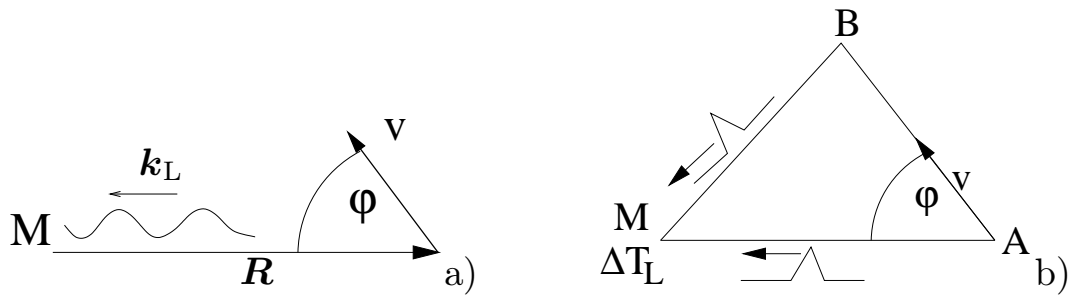
$$A_i(x) = a_i(k_j x^j), \quad k_j k^j = 0, \quad (10.17)$$

ahol

$$k^i = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

és minden IR-ben  $\omega^2 = c^2 k^2$ . A megfigyelő IR-ét tekintsük labor rendszernek, ekkor a (10.3) Lorentz transzformáció szerint  $k^0$  kifejezhető  $k_L^i$ -vel

$$\frac{\omega}{c} = \text{ch}\beta \frac{\omega_L}{c} - \text{sh}\beta \mathbf{n} \mathbf{k}_L = \text{ch}\beta \frac{\omega_L}{c} - \text{ch}\beta \frac{\mathbf{v} \mathbf{k}_L}{c} = \text{ch}\beta \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right) \frac{\omega_L}{c}. \quad (10.19)$$



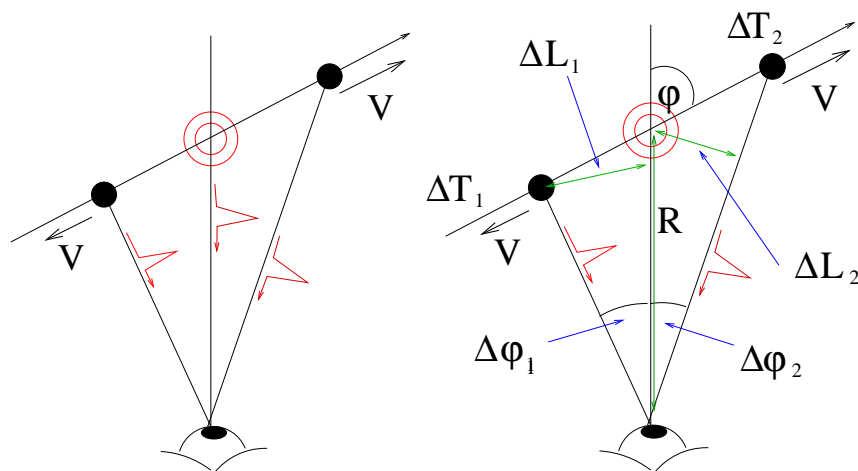
20. ábra. Doppler effektus. Az M megfigyelő észleli a  $v$  sebességű forrás által kibocsájtott fényt. Az a) ábra a négyesformalizmust, a b) a direkt számolást illusztrálja.

A fenti eredményt elemi megfontolások alapján is megkaphatjuk. Tegyük fel, hogy a fényforrást  $R$  távolságból figyeljük, továbbá az  $\Delta T$  sajátidőközönként fényjelet bocsájt ki, és mi ezt  $\Delta T_L$  labor időközönként észleljük. Ekkor az első fényjel kibocsájtása és a második beérkezése között eltelt idő labor rendszerben

$$\begin{aligned} \frac{R}{c} + \Delta T_L &= \Delta T \operatorname{ch} \beta + \frac{1}{c} \sqrt{R^2 + v^2 \Delta T^2 \operatorname{ch}^2 \beta - 2 \cos \varphi R v \Delta T \operatorname{ch} \beta} \\ \Rightarrow \Delta T_L &\approx \Delta T \operatorname{ch} \beta \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right), \end{aligned} \quad (10.20)$$

amely ekvivalens a Lorentz transzformációból kapott (10.19) formulával. A frekvenciák transzformációs képlete fényjelek kibocsájtásával kapcsolatos rövid időkülönbségekre is érvényes, ezt a következő példában alkalmazzuk.

- Csillag két plazmafelhőt bocsájt ki: fénysebességnél gyorsabb látszólagos mozgás (Fizikai diákolimpiai feladat, ld. Fiz. Szemle, 1998/8-9.)



21. ábra. A csillagrobbanás vázlatja és a paraméterek magyarázata.

**Megfigyelt mennyiségek:**  $\Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_2$ ,  $\Delta T_L$  (a robbanás és az aktuális pozíció megfigyelése között eltelt földi idő),  $R$  (feltesszük, hogy a robbanás távolságát függetlenül megmérték).

**Ismeretlen fizikai mennyiségek:**  $v$  közös sebesség,  $\varphi$ , ill.  $\Delta T_1$ ,  $\Delta T_2$  (a robbanástól

143

az észlelt fényjel kibocsájtásáig eltelt sajátidők).

A robbanástól számított látszólagos távolságok  $\Delta L_i = R\Delta\varphi_i$ , és innen a látszólagos sebességek

$$v_i = \frac{\Delta L_i}{\Delta T_L}. \quad (10.21)$$

A megfigyelő az egyik sebességet,  $v_1$ -et, a  $c$ -nél nagyobbak találja! Az időkülönbségek transzformációja a Doppler-effektus (10.20) formulája alapján

$$\begin{aligned} \Delta T_L &= \text{ch}\beta\Delta T_1 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right), \\ &= \text{ch}\beta\Delta T_2 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi\right). \end{aligned} \quad (10.22)$$

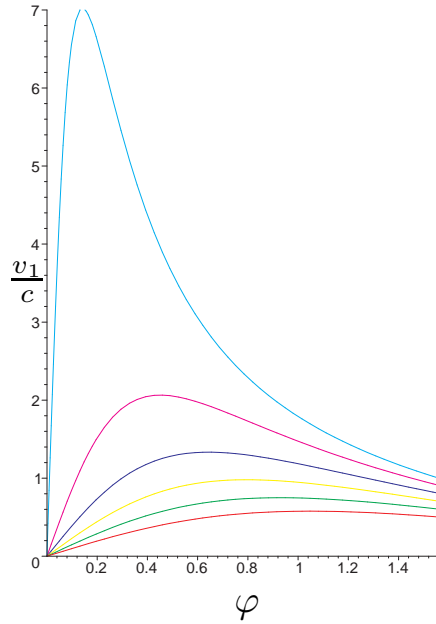
A látszólagos utak és sebességek

$$\begin{aligned} \Delta L_i &= v \sin \varphi \text{ch}\beta\Delta T_i, \\ v_1 &= \frac{\Delta L_1}{\Delta T_L} = \frac{v \sin \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}, \\ v_2 &= \frac{\Delta L_2}{\Delta T_L} = \frac{v \sin \varphi}{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Innen  $v, \varphi$  kiszámítható. Valóban,  $v_1$  lehet  $c$ -nél nagyobb!

144





22. ábra. A közeledő objektum  $v_1/c$  látszólagos sebessége különböző valóságos sebességek ( $v/c = 0.5, 0.6, \dots, 0.9, 0.99$ ) esetén, mint a  $\varphi$  szög függvénye. A maximum helye  $\varphi^* = \arccos v/c$ , értéke  $v_1^{\max} = v/\sqrt{1 - v^2/c^2} = c \operatorname{sh}\beta$ , ez nagyobb  $c$ -nél, ha  $v > 1/\sqrt{2}$ .

145

## 11. Hullámtér

### 11.1. Komplex hullámvektor

Töltés nélküli térben vizsgáljunk olyan hullámmegoldásokat, melyekben nem feltétlenül valós a hullámszámvektor,  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ , ahol  $k = \omega/c$ , de  $\mathbf{n}$  lehet komplex. Előre nem alkalmazunk megszorítást  $\mathbf{n}$ -re nézve, pl. nem írjuk elő az  $|\mathbf{n}| = 1$  normálást, hanem a ME alkalmazásától várunk  $\mathbf{n}$ -re feltételt.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}(\mathbf{k})e^{ik(\mathbf{n}\mathbf{r} - ct)}, & \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{b}(\mathbf{k})e^{ik(\mathbf{n}\mathbf{r} - ct)}, & \mathbf{k} &= k\mathbf{n} \\ \nabla \mathbf{E} &= 0 \Rightarrow \mathbf{n}\mathbf{e} = 0, & \nabla \mathbf{B} &= 0 \Rightarrow \mathbf{n}\mathbf{b} = 0, \end{aligned} \quad (11.1)$$

továbbá a rotációs egyenletekből

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{b} = -\mathbf{e}. \quad (11.2)$$

Innen

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}) = -(\mathbf{n}\mathbf{n})\mathbf{e} = -\mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{n}\mathbf{n} = 1. \quad (11.3)$$

146

Legyen  $\mathbf{n} = a\mathbf{n}_1 + ib\mathbf{n}_2$ , ahol  $\mathbf{n}_1$  és  $\mathbf{n}_2$  valós egységvektorok. Mivel

$$1 = \mathbf{n}\mathbf{n} = a^2 - b^2 + 2iab\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 \Rightarrow \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = 0, a^2 - b^2 = 1 \quad (11.4)$$

ezért paraméterezhetjük  $\mathbf{n}$ -et a következő módon

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \text{ch}\vartheta\mathbf{n}_1 + i\text{sh}\vartheta\mathbf{n}_2 \\ \vartheta = 0 : \text{ valós } \mathbf{k} &\Rightarrow \text{homogén hullám} \end{aligned} \quad (11.5)$$

Bontsuk fel  $\mathbf{e}$ -t komponensekre,  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ ,

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i \varepsilon_i.$$

Kikötések  $\mathbf{n}$ -re:  $\mathbf{n}\mathbf{e} = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 \text{ch}\vartheta + i\varepsilon_2 \text{sh}\vartheta = 0$ , tehát

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= iA \text{sh}\vartheta, \\ \varepsilon_2 &= -A \text{ch}\vartheta, \\ \varepsilon_3 &= B, \end{aligned} \quad (11.6)$$

ahol  $A$  és  $B$  komplex paraméterek. Hasonlóképpen

$$\mathbf{h} = \mathbf{n} \times \mathbf{e} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i \chi_i,$$

ahol

$$\begin{aligned} \chi_1 &= iB \text{sh}\vartheta, \\ \chi_2 &= -B \text{ch}\vartheta, \\ \chi_3 &= -A. \end{aligned} \quad (11.7)$$

A „szokásos” síkhullámot valós  $\mathbf{n}$  mellett kapjuk, ekkor  $\vartheta = 0$ . Ha  $\vartheta \neq 0$ , akkor a hullám  $\mathbf{n}_1$  irányban oszcillál,  $\mathbf{n}_2$  irányban exponenciálisan nő vagy csökken. A divergálást csak a határfeltétel állíthatja meg, ha ilyen nem áll útban, akkor a hullám csak valós  $\mathbf{n}$ -et tartalmazhat, s ekkor beszélünk homogén síkhullámról.

## 11.2. Homogén hullám energiája

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (E^2 + B^2), \quad (11.8)$$

a terek Fourier reprezentációjában ( $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ )

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2} \int d^3k \left( \mathbf{e}(\mathbf{k}) e^{ik(\mathbf{n}\mathbf{r}-ct)} + \text{komplex konjugált} \right), \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \int d^3k \left( \mathbf{b}(\mathbf{k}) e^{ik(\mathbf{n}\mathbf{r}-ct)} + \text{komplex konjugált} \right).\end{aligned}\tag{11.9}$$

Emlékeztetünk arra hogy

$$\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r = 8\pi^3 \delta(\mathbf{k}),\tag{11.10}$$

ezért

$$\begin{aligned}U_E &= \frac{\pi^2}{2} \int d^3k \left( |\mathbf{e}(\mathbf{k})|^2 + \Re(\mathbf{e}(\mathbf{k})\mathbf{e}(-\mathbf{k})e^{-2ikct}) \right), \\ U_B &= \frac{\pi^2}{2} \int d^3k \left( |\mathbf{b}(\mathbf{k})|^2 + \Re(\mathbf{b}(\mathbf{k})\mathbf{b}(-\mathbf{k})e^{-2ikct}) \right).\end{aligned}\tag{11.11}$$

Használjuk ki, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{e}(\mathbf{k}) &= \mathbf{b}(\mathbf{k}) \\ -\mathbf{n} \times \mathbf{e}(-\mathbf{k}) &= \mathbf{b}(-\mathbf{k}) \\ \Rightarrow -\mathbf{e}(\mathbf{k})\mathbf{e}(-\mathbf{k}) &= \mathbf{b}(\mathbf{k})\mathbf{b}(-\mathbf{k}).\end{aligned}\tag{11.12}$$

Innen

$$U = U_E + U_B = \frac{\pi^2}{2} \int d^3k (|\mathbf{e}(\mathbf{k})|^2 + |\mathbf{b}(\mathbf{k})|^2) = \pi^2 \int d^3k |\mathbf{e}(\mathbf{k})|^2 = \pi^2 \int d^3k |\mathbf{b}(\mathbf{k})|^2.\tag{11.13}$$

Egy módusra jutó energia

$$\begin{aligned}U &= \int u(\mathbf{k}) d^3k \\ u(\mathbf{k}) &= \frac{\pi^2}{2} (|\mathbf{e}(\mathbf{k})|^2 + |\mathbf{b}(\mathbf{k})|^2)\end{aligned}\tag{11.14}$$

Coulomb-mértékben  $\phi = 0$ ,  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ . Ha  $\mathbf{A}$ -t az  $\mathbf{a}(\mathbf{k})$  amplitúdóval jellemezzük, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathbf{k}) &= i\mathbf{k}\mathbf{a}(\mathbf{k}) \\ \mathbf{b}(\mathbf{k}) &= i\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k}) \\ \Rightarrow u(\mathbf{k}) &= \pi^2 k^2 |\mathbf{a}(\mathbf{k})|^2.\end{aligned}\tag{11.15}$$

Egy módus energiájának elektromos és mágneses járulékaik különbözőek, és időben oszcillálnak. Az időfüggő tagok azonban az összegből kiesnek, a módus összenergiája időben

állandó – folyamatos energiacsere történik a mágneses és elektromos tér között.

### 11.3. Impulzus

A hullámtér impulzusát a következő alakba írhatjuk

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3r. \quad (11.16)$$

Fejtsük ki a vektorszorzatot és használjuk a  $\nabla \mathbf{E} = 0$  egyenletet

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = E_j \nabla A_j - (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{A} = E_j \nabla A_j - \nabla_j (E_j \mathbf{A}). \quad (11.17)$$

Innen, a felületi tagot elhagyva, az impulzusra kapjuk

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{4\pi c} \int E_j \nabla A_j d^3r \\ &= \frac{1}{4\pi c} \frac{8\pi^3}{2} \int d^3k (nk^2 |\mathbf{a}(\mathbf{k})|^2 + nk^2 \Re(\mathbf{a}(\mathbf{k}) \mathbf{a}(-\mathbf{k}) e^{-2ikct})) = \\ &= \frac{\pi^2}{c} \int d^3k nk^2 |\mathbf{a}(\mathbf{k})|^2 = \int d^3k \mathbf{p}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (11.18)$$

151

A második tagban a valós rész páros függvény a  $\mathbf{k}$ -ban, az  $\mathbf{n}$  faktor viszont páratlan, ezért integráláskor a tag eltűnik. A  $\mathbf{p}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{n}}{c} u(\mathbf{k})$  reláció összhangban van azzal, hogy a fény négyes impulzusának hossza nulla.

### 11.4. Impulzusmomentum

Az impulzusmomentum az impulzussűrűség ismeretében felírható

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3r. \quad (11.19)$$

Fejtsük ki az integrál alatt álló kifejezést felhasználva, hogy  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , majd alakítsuk teljes divergenciává a második tagot, végül használjuk ki, hogy  $\nabla_j \mathbf{r} = \mathbf{e}_j$  és  $\nabla \mathbf{E} = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A})) &= \mathbf{r} \times (E_j \nabla A_j - (E_j \nabla_j) \mathbf{A}) \\ &= E_j \mathbf{r} \times \nabla A_j - \nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A}) + E_j (\nabla_j \mathbf{r}) \times \mathbf{A} + (\nabla_j E_j) \mathbf{r} \times \mathbf{A} \\ &= E_j \mathbf{r} \times \nabla A_j - \nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A}) + \mathbf{E} \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (11.20)$$

A felületi tagot elhagyva az impulzusmomentumot két tag összegeként kapjuk

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{pálya}} + \mathbf{L}_{\text{spin}}, \quad (11.21)$$

152

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{pálya}} &= \frac{1}{4\pi c} \int d^3r E_j \mathbf{r} \times \nabla A_j, \\ \mathbf{L}_{\text{spin}} &= \frac{1}{4\pi c} \int d^3r \mathbf{E} \times \mathbf{A} = \frac{\pi^2}{c} \int ik \mathbf{a}(\mathbf{k}) \times \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Itt kihasználtuk, hogy  $\mathbf{a}(\mathbf{k}) \times \mathbf{a}(-\mathbf{k})$  páratlan függvény, ezért az integrálásakor kiesik. A második tag expliciten nem tartalmazza a helyvektort, ezt tekintjük a saját impulzusmomentumnak, azaz spinnek.

Válasszuk a Coulomb mértéket,  $\mathbf{k}\mathbf{a} = 0$ , és vezessünk be két  $\mathbf{n}$ -re merőleges  $\mathbf{t}_1$ , és  $\mathbf{t}_2$  vektort úgy, hogy  $\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \mathbf{n}$ . Diagonalizáljuk a vektorszorzatot  $\mathbf{L}_{\text{spin}}$ -ben! Bevezethetünk két komplex vektort a következő módon

$$\mathbf{t}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t}_1 \pm i\mathbf{t}_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}_+ \times \mathbf{t}_- = -i\mathbf{n}. \quad (11.23)$$

Az  $\mathbf{a}$  vektor ekkor a következő alakba írható

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{t}_1 + a_2\mathbf{t}_2 = a_+\mathbf{t}_+ + a_-\mathbf{t}_-, \quad (11.24)$$

153

ahonnan

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{a}^* &= (a_+\mathbf{t}_+ + a_-\mathbf{t}_-) \times (a_+\mathbf{t}_+ + a_-\mathbf{t}_-)^* = \\ &= -i(|a_+|^2 - |a_-|^2)\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Az impulzusmomentum spin járuléka tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{spin}} &= \int d^3\mathbf{k} \mathbf{l}_{\text{spin}}, \\ \mathbf{l}_{\text{spin}} &= \frac{\pi^2}{c} \mathbf{k} (|a_+|^2 - |a_-|^2). \end{aligned} \quad (11.26)$$

**11.1. Házi feladat.** a) Mutassuk meg, hogy a hullámcsomag tömegközéppontja

$$\mathbf{R} = \frac{1}{8\pi U} \int \mathbf{r} (E^2 + B^2) d^3\mathbf{r} = \langle \mathbf{r} \rangle. \quad (11.27)$$

egyenletes  $\mathbf{v} = c^2\mathbf{P}/U$  sebességgel halad. b) Hogyan folyik szét a hullámcsomag, azaz  $\langle |\mathbf{r}|^2 \rangle - |\langle \mathbf{r} \rangle|^2 = \Delta(t) = ?$  (10-10%).

154

## 12. Töltések tere

### 12.1. Inhomogén hullámgyenlet

A hullámgyenlet Lorenz-mértékben

$$\square A^i = \partial_j \partial^j A^i = \frac{4\pi}{c} j^i.$$

Labor rendszerben

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 4\pi \rho \quad (12.1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (12.2)$$

### 12.2. A Green függvény módszere

A Green függvény (GF) definíciója

$$\square G(\mathbf{r}, t) = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (12.3)$$

155

ahol  $\mathbf{r}', t'$  paraméterek. Hajtsunk végre Fourier transzformációt az időben

$$G_\omega(\mathbf{r}) = \int dt e^{i\omega t} G(\mathbf{r}, t) \quad (12.4)$$

és legyen  $k = \frac{\omega}{c}$ . Ekkor a (12.3) új alakja

$$\Delta G_\omega + k^2 G_\omega = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\omega t'}, \quad (12.5)$$

azaz a fázisfaktortól eltekintve a  $G_\omega$  a Helmholtz egyenlet GF-e. Bevezetve az  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  vektort a (12.5) radiális alakja

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R G_\omega + k^2 G_\omega = -4\pi \delta(\mathbf{R}) e^{i\omega t'}. \quad (12.6)$$

Ennek megoldása  $R > 0$  mellett

$$G_\omega = \frac{1}{R} (A_\omega^+ e^{ikR} + A_\omega^- e^{-ikR}) = \frac{1}{R} \sum_{\sigma=\pm 1} A_\omega^\sigma e^{ik\sigma R}. \quad (12.7)$$

Integráljuk a (12.5) egyenletet egy  $\varepsilon \rightarrow 0$  sugarú gömbre (a  $k^2$ -tel arányos tag eltűnik)

$$\int_{R<\varepsilon} d^3r \Delta G_\omega \approx \int_{R<\varepsilon} \Delta \left( \frac{1}{R} \right) \sum_{\sigma=\pm 1} A_\omega^\sigma e^{ik\sigma R} = -4\pi \sum_{\sigma=\pm 1} A_\omega^\sigma = -4\pi e^{i\omega t'}. \quad (12.8)$$

156

Az  $A_\omega^\sigma$ -ra ezért írhatjuk

$$A_\omega^\sigma = a^\sigma e^{i\omega t'} + \sigma b_\omega e^{i\omega t'}, \quad (12.9)$$

ahol

$$\sum_\sigma a^\sigma = 1. \quad (12.10)$$

Innen a GF

$$\begin{aligned} G(R, t) &= \frac{1}{R} \sum_\sigma \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} A_\omega^\sigma e^{i\sigma k R} \\ &= \frac{1}{R} \sum_\sigma \left[ a^\sigma \delta\left(t - t' - \sigma \frac{R}{c}\right) + \sigma b \left(t - t' - \sigma \frac{R}{c}\right) \right]. \end{aligned} \quad (12.11)$$

A GF-ben lévő  $b_\omega$  ill.  $b(t)$  határozatlan, a határfeltételek kielégítésére fordítható. Ha a végtelenben lecsengő megoldást keresünk s más határon nem kell illeszteni, akkor a homogén egyenletet kielégítő  $b(t)$ -t tartalmazó tag elhagyható, ezért

$$G = \sum_\sigma a^\sigma G^\sigma, \quad (12.12)$$

ahol

$$G^\pm(R, t - t') = \frac{\delta(t - t' \mp \frac{R}{c})}{R}. \quad (12.13)$$

Ha  $t > t'$ , akkor  $G^- = 0$ , ha  $t' > t$ , akkor  $G^+ = 0$ . A  $G^+$  a retardált, a  $G^-$  az avanzsált GF.

### 12.3. A sugárzási tér GF segítségével

Inhomogén hullámeqyenlet

$$\square\psi = 4\pi f(\mathbf{r}, t) \quad (12.14)$$

időben korlátozott forrással:  $f(\mathbf{r}, t) = 0$  a  $[t_1, t_2]$  intervallumon kívül.

- Ha  $t < t_1$  esetén ismert  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$ , akkor

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) + \int d^3r' \int dt' G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t'), \quad (12.15)$$

a második tag eltűnik  $t < t_1$  mellett.

- Ha  $t > t_2$  esetén ismert  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$ , akkor

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) + \int d^3r' \int dt' G^-(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t'), \quad (12.16)$$

a második tag eltűnik  $t > t_2$  mellett.

A második esetben az avanszált GF lép fel, nem mondhatjuk tehát azt, hogy a kauzalitás miatt egyedül a retardált GF a fizikai. Az, hogy melyik GF használandó, attól függ, milyen időkből ismerjük a megoldást.

Ha a tér zérus volt a forrás megjelenése előtt, akkor a retardált GF-t alkalmazzuk. Ilyenkor a — végtelenben lecsengő — potenciálok a retardált GF-nyel

$$\begin{aligned} G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \frac{\delta(t - t' - \frac{R}{c})}{R}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R}, \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \int d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R}. \end{aligned} \quad (12.17)$$

E térre mondhatjuk, hogy a forrás keltette, ezért elterjedtebb a retardált GF.

## 12.4. Ponttöltés tere: Liénard–Wiechert potenciálok

Ponttöltés esetén a töltéssűrűség illetve az áramsűrűség ( $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ ):

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad \mathbf{j}(t) = e\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)). \quad (12.18)$$

Felhasználva a retardált GF-t, a skalárpotenciál

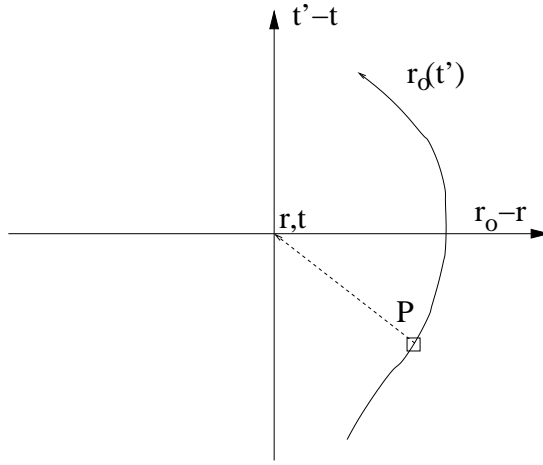
$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= e \int \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' dt' \\ &= e \int dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \end{aligned} \quad (12.19)$$

Megoldandó  $t'$ -re

$$c(t - t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|, \quad (12.20)$$

mivel  $|\mathbf{v}(t)| < c$ , azért  $t'$  egyértelmű. A  $t'$  az az időpont, amelyben emittált fényjel az  $\mathbf{r}$ -be a  $t$  időpontban érkezik.





23. ábra. Ponttöltés pályája a téridőben (folytonos vonal). A P ponthoz tartozó  $t'$  a keresett egyértelmű megoldás. A P-ben emittált fényjel az  $\mathbf{r}$ -et  $t$ -ben éri el.

Szükségünk lesz  $\delta(x)$  következő tulajdonságára:

$$\delta(f(x))|df| = \sum_{f(x_i)=0} \delta(x - x_i)|dx| \Rightarrow \delta(f(x)) = \sum_{f(x_i)=0} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad (12.21)$$

161

Most egy  $x_i$  gyök van. Helyettesítések:

$$\begin{aligned} t' &\rightarrow x \\ t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} &\rightarrow f(x) \\ 1 + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}(t')(\mathbf{r}_0(t') - \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} &= 1 - \frac{\mathbf{v}(t')\mathbf{R}(t')}{cR(t')} \rightarrow f'(x) = |f'(x)|. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Itt bevezettük

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t), \quad (12.23)$$

$t' = t'(\mathbf{r}, t)$  a (12.20) megoldása, és  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0$ . Legyen

$$L(t) = R(t') - \frac{1}{c}\mathbf{v}(t')\mathbf{R}(t'), \quad (12.24)$$

ezzel a (12.21,12.22) egyenletekből kapjuk a potenciált

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{L}, \quad (12.25)$$

s hasonlóan a vektorpotenciálra a  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t')$  jelöléssel

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{cL}. \quad (12.26)$$

162

## 12.5. LW terek

Segédszámítások

i)  $\partial_t t' = ?$

$$\begin{aligned} c(t - t') &= R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|, \\ c(1 - \partial_t t') &= -\frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{R} \partial_t t', \\ \Rightarrow \partial_t t' &= \frac{R}{R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}} = \frac{R}{L}. \end{aligned} \quad (12.27)$$

ii)  $\nabla t' = ?$

$$-c\nabla t' = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{R} \nabla t' \quad \Rightarrow \quad \nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{cL} \quad (12.28)$$

iii)  $\partial_{t'} L = ?$

$$\partial_{t'} L = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R} - \frac{1}{c}\mathbf{a}\mathbf{R} + \frac{1}{c}v^2, \quad \text{ahol } \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}(t'). \quad (12.29)$$

163

Jelölés

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}\mathbf{R} = LR$$

iv)  $\nabla L = ?$

$$\nabla L = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} + \partial_{t'} L \nabla t' = \frac{\mathbf{K}}{R} - \frac{\mathbf{R}}{cL} \partial_{t'} L \quad (12.30)$$

v)  $\partial_t \mathbf{v} = ?$

$$\partial_t \mathbf{v} = \partial_{t'} \mathbf{v} \partial_t t' = \mathbf{a} \frac{R}{L}$$

vi)  $\partial_t L = ?$

$$\partial_t L = \frac{R}{L} \partial_{t'} L$$

A potenciálok

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \nabla \frac{e}{L} = -e \frac{\nabla L}{L^2} \\ \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} &= \frac{e}{c^2} \partial_t \frac{\mathbf{v}}{L} = \frac{e}{c^2} \left( \frac{\partial_t \mathbf{v}}{L} - \mathbf{v} \frac{\partial_t L}{L^2} \right) \end{aligned} \quad (12.31)$$

164

Az elektromos tér az eddigi eredmények felhasználásával

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A} - \nabla\phi \\ &= e\left\{\frac{\mathbf{K}}{RL^2} + \frac{\mathbf{K}}{cL^3}\left(\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{a}\mathbf{R}}{c} - \frac{v^2}{c}\right) - \frac{\mathbf{a}\mathbf{R}}{c^2L^2}\right\}. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Mivel

$$L + \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} = R \quad (12.33)$$

azért

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= e\left\{\frac{\mathbf{K}}{L^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\mathbf{K}}{c^2L^3}(\mathbf{a}\mathbf{R}) - \frac{\mathbf{a}\mathbf{R}}{c^2L^2}\right\} \\ &= e\frac{\mathbf{K}}{L^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{e}{c^2L^3}\mathbf{R} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (12.34)$$

**12.1. Házi feladat.** *Mutassuk meg*

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cL}$$

165

alapján, hogy

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E}$$

(20%)

## 12.6. Kovariánsan

A GF kovariáns alakban

$$\frac{1}{c}G^\pm(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = G^\pm(x^i - x'^i) = 2\theta(\pm(x^0 - x'^0))\delta((x - x')^2), \quad (12.35)$$

mert

$$(x - x')^2 = c^2|t - t'|^2 - \underbrace{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}_{R^2}, \quad (12.36)$$

$$\delta((x - x')^2) = \frac{1}{2R}(\delta(c(t - t') - R) + \delta(c(t - t') + R)), \quad (12.37)$$

és a lépcső függvény ezek egyikét választja ki. Noha a  $\theta$  függvény nem kovariáns, a  $\delta$ -val szorozva az, mert csak azt jelöli ki, hogy az  $x$ -hez tartozó fénykúp melyik oldalán fekszik az  $x'$ .

166

Kovariáns tárgyalásban a ponttöltés pályája  $x_0^i(\tau)$  A négyes vektorpotenciál és az áram retardált GF-nyel

$$A^i(x) = \frac{1}{c} \int d^4x' G^+(x - x') j^i(x') \quad (12.38)$$

$$j^i(x) = ec \int u^i(\tau) \delta^{(4)}(x - x_0(\tau)) d\tau$$

A  $j^i$  nulladik komponense valóban a töltéssűrűség ( $u^0 = c\gamma$ ,  $d\tau = dt'/\gamma$ )

$$j^0 = ec \int c\gamma \frac{dt'}{\gamma} \delta(ct - ct') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')) = ce \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) = c\rho(\mathbf{r}, t). \quad (12.39)$$

Helyettesítsük be  $A^i$ -be  $j^i$ -t és a GF-t:

$$A^i(x) = \frac{1}{c} \int ec u^i(\tau) \delta^4(x' - x_0(\tau)) 2\theta(x^0 - x'^0) \delta((x - x')^2) d^4x' d\tau$$

$$= 2e \int d\tau u^i(\tau) \theta(x^0 - x_0^0(\tau)) \delta((x - x_0(\tau))^2) \quad (12.40)$$

$$= \frac{eu^i(\tau_0)}{u_j(\tau_0)(x^j - x_0^j(\tau_0))},$$

ahol a  $\tau_0$  időpontban

$$|x - x_0(\tau_0)| = 0 \quad \Rightarrow \quad c(t - t_0(\tau_0)) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau_0)|, \quad (12.41)$$

ezt a gyököt választotta ki a  $\theta$  lépcsőfüggvény. Például a skalárpotenciál

$$\phi = A^0 = \frac{ec\gamma}{c\gamma(ct - ct_0) - \gamma\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - \frac{1}{c}\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} = \frac{e}{L},$$

ugyanaz mint a nemkovariánsan (labor rendszerben) kapott eredmény.

**12.2. Házi feladat.** *Határozzuk meg a ponttöltés által keltett  $F^{ij}$  kovariáns alakját! (A pálya  $\tau$  szerinti deriváltját tartsuk meg kijelölve.) (20%)*

## 12.7. Az LW terekről

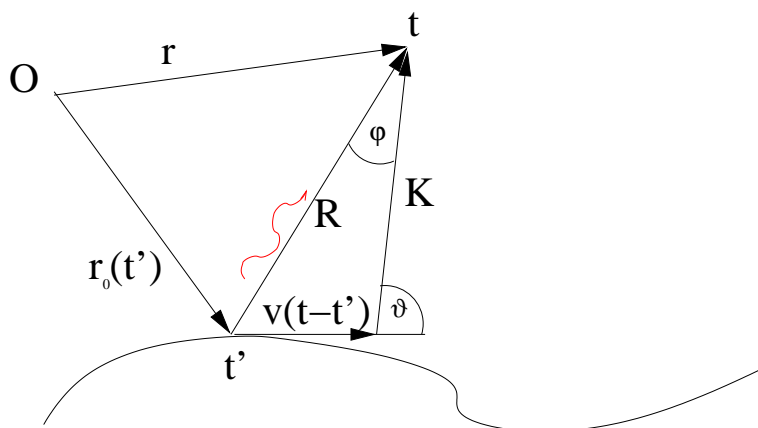
i) Kis sebességekre:

$$\begin{aligned}
 t &\approx t', & \mathbf{K} &\approx \mathbf{R} \approx \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t), & L &\approx R \\
 \mathbf{R} \times \mathbf{K} &\approx -\frac{R}{c} \mathbf{R} \times \mathbf{v} \\
 \mathbf{E} &\approx e \frac{\mathbf{R}}{R^3} && \text{Coulomb törvény} \\
 \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E} \approx \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^3} && \text{Biot-Savart törvény}
 \end{aligned}
 \tag{12.42}$$

ii) K és L jelentése

Részecske pozíciója az emisszió pillanatában:  $\mathbf{r}_0(t')$ ; megfigyelő:  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$ ;  $\mathbf{K} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t') - \mathbf{v}(t')(t - t')$ : megfigyelőhöz abból a pontból mutat, ahol a részecske lenne ha egyenletesen mozogna. A  $\mathbf{K}$  és  $\mathbf{R}$  által bezárt szög  $\varphi$ , a  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{K}$ -é pedig  $\vartheta$ .

169



24. ábra. A  $\mathbf{K}$  ábrázolása. Mivel  $R = c(t - t')$ , ezért  $c|\sin \varphi| = v|\sin \vartheta|$ .

Ekkor

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}R}{c} \\
 L &= \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}{R} = K \cos \varphi = K \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta} \\
 \text{mert} \quad |\sin \varphi| &= \left| \frac{v}{c} \sin \vartheta \right|
 \end{aligned}
 \tag{12.43}$$

170

iii) Egyenletesen mozgó töltés

$$\text{legyen: } \mathbf{v} = (v, 0, 0) \quad \text{és} \quad \mathbf{K} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R = \mathbf{R}_t \quad (12.44)$$

a) Lorentz transzformáció relativitáselmélet nélkül

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) &\rightarrow R_t^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2 \\ \sin^2 \vartheta &= \frac{y^2 + z^2}{R_t^2} \end{aligned} \quad (12.45)$$

$$L^2 = R_t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right) = (x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)$$

$$\text{a potenciál: } \phi = \frac{e}{L}, \quad \text{jelölés: } \phi_0 = \frac{e}{r} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (12.46)$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \phi_0 \left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y, z \right)$$

Ez éppen a skalárpotenciál Lorentz transzformációja, mert a vektorpotenciál az együttmozgó IR-ben zérus! A vektorpotenciál Lorentz-transzformációját hasonló eljárással

kaphatjuk.

b) Tér  $\mathbf{a} = 0$  esetén

$$\mathbf{E} = e \frac{\mathbf{K}}{L^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = e \frac{\mathbf{R}_t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{R_t^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (12.47)$$

A korábban LT-val kapott tér! Most sugárzási háttérét is értjük: A különböző helyekre különböző korábbi időpontból érkeznek a jelek, s ezek „konspirálnak” a merőleges síkba sűrűsödő erővonalrendszeré.

## 13. Ponttöltés sugárzása

### 13.1. Kisugárzott teljesítmény

i) **Energiaáram**

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi R} (\mathbf{E} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{E})) = \frac{c}{4\pi R} (\mathbf{R}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{R}\mathbf{E})). \quad (13.1)$$

Nagy  $R$  esetén  $\mathbf{E}$  formulájának első tagja gyorsabban cseng le, mint a második tag, és mivel az utóbbi merőleges  $\mathbf{R}$ -re, azért

$$\mathbf{S} \approx \frac{c}{4\pi} \mathbf{n}_R E^2 \approx \frac{e^2}{4\pi L^6 c^3} \mathbf{n}_R (\mathbf{R} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{a}))^2, \quad (13.2)$$

amelyből kis  $\mathbf{v}$  mellett

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}R}{c} \approx \mathbf{R}, & L &= R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c} \approx R \\ \mathbf{S} &= \frac{\mathbf{n}_R e^2}{4\pi R^6 c^3} R^4 a^2 \sin^2 \vartheta = \frac{\mathbf{n}_R}{4\pi} \frac{e^2 a^2}{c^3 R^2} \sin^2 \vartheta, \end{aligned} \quad (13.3)$$

ahol  $\vartheta$  az  $\mathbf{a}$  és az  $\mathbf{R}$  által bezárt szög. A kisugárzott teljesítmény ( $\int d\Omega \sin^2 \vartheta = 8\pi/3$ )

$$P = \oint \mathbf{S} d\mathbf{A} = \frac{2e^2}{3c^3} a^2.$$

Nagy  $\mathbf{v}$ -kre milyen formula érvényes? A fenti eredményt a töltés  $\mathcal{K}_0$  pillanatnyi együtt-

mozgó IR-jében értjük, s kovariánsan kiterjesztjük. Felidézzük

$$u^i = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad w^i = \frac{du^i}{d\tau}, \quad \mathcal{K}_0\text{-ban: } w^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}, \quad (13.4)$$

s a  $w^i w_i \rightarrow a^2$  behelyettesítéssel élünk.

$$P = -\frac{2e^2}{3c^3} w^i w_i.$$

Írjuk ki komponensekben, labor rendszerből

$$\begin{aligned} w^0 &= c \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma^3 \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \frac{\mathbf{v}}{c} = \gamma^4 \frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{c} \\ w^\alpha &= \frac{d\gamma\mathbf{v}}{d\tau} = \mathbf{v} \frac{\gamma^4 \mathbf{a}\mathbf{v}}{c^2} + \gamma^2 \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Ezekből négyzetre emelés és átrendezés után:

$$-w^i w_i = \gamma^4 a^2 + \frac{\gamma^6}{c^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})^2 = \gamma^6 \left( a^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{a} \times \mathbf{v})^2 \right) \quad (13.6)$$

$$\text{Végül: } P = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 \left( a^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{a} \times \mathbf{v})^2 \right) \quad (\text{Liénard 1898})$$

175

## ii) Sugárzás gyorsítókbán

(a) Lineáris gyorsítók ( $\mathbf{a} \parallel \mathbf{v}$ ):

$$\frac{1}{m} \frac{dp}{dt} = \frac{dv\gamma}{dt} = a\gamma + \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 a = a\gamma^3 \quad (13.7)$$

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} a^2 \gamma^6 = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{1}{m^2} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2$$

A betáplált  $dU/dt$  és a kisugárzott  $P$  teljesímeny

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dU}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dU}{dt} \quad (13.8)$$

$$\frac{P}{\frac{dU}{dt}} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{1}{m^2 v} \frac{dp}{dt} \stackrel{v \approx c}{=} \frac{2}{3} \left( \frac{e}{mc^2} \right)^2 \frac{dU}{dx}$$

konkrét becslés:

$$\left( \frac{mc^2}{e} \right)^2 = 2 \cdot 10^{14} \frac{\text{MeV}}{m} \quad \text{tipikusan: } \frac{dU}{dx} \sim 10 \frac{\text{MeV}}{m}, \quad (13.9)$$

tehát a sugárzási veszteség elhanyagolható.

176



(b) **Szinkrotron** (közelítőleg  $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$ ):

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2 \gamma^4 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^4 \gamma^4}{\varrho^2}, \quad (13.10)$$

ahol  $\varrho$  a körpálya sugara. Ha  $v \approx c$  és a betáplált teljes energia  $U \approx mc^2 \gamma$ , akkor

$$T = \frac{2\pi\varrho}{v}, \quad PT = \Delta U = \frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^3 \gamma^4}{\varrho} \approx \frac{4\pi e^2 U^4}{3m^4 c^8 \varrho}$$

$$\Delta U [\text{MeV}] = 0,0885 \frac{U^4 [\text{GeV}]}{\varrho [m]} \quad (13.11)$$

$$\varrho = 100\text{m}, \quad U = 10\text{GeV} \Rightarrow \Delta U = 8,85\text{MeV},$$

a veszteség jelentős.

iii) **Szögeloszlás**

A  $T_1 < t' < T_2$  időintervallumban kisugárzott, felületegységre eső energia ( $t'$  a részecske sugárzásának ideje laboridőben mérve)

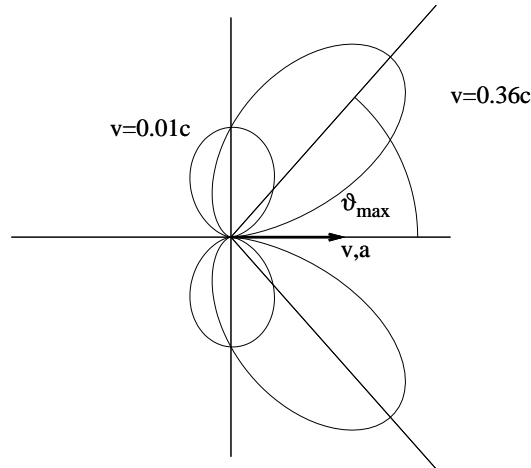
$$\int \mathbf{S} \mathbf{n}_R dt = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{S} \mathbf{n}_R \frac{dt}{\frac{L}{R}} dt'.$$

Felhasználva, hogy  $c(t - t') = R(t')$  nyerjük  $dt/dt' = L/R = 1 - \frac{\mathbf{v} \mathbf{n}_R}{c}$ , ahonnan az egységnyi térszögbe eső sugárzási teljesítmény (13.2) alapján

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{S} \mathbf{n}_R) \frac{L}{R} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|\mathbf{n}_R \times [(\mathbf{n}_R - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a}]|^2}{(1 - \frac{\mathbf{v} \mathbf{n}_R}{c})^5}.$$

• **lineáris gyorsító**  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{v}$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} a^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta)^5} \quad (13.12)$$



25. ábra. Lineáris gyorsítóban a sugárzás intenzitásának szögeloszlása kis és nagy sebességek mellett. Ultrarelativisztikus limeszben  $\vartheta_{\max} \approx 1/2\gamma$ .

A  $v \rightarrow c$  ultrarelativisztikus (UR) közelítésben, feltéve, hogy kis  $\vartheta$ -ra koncentrálódik

179

a sugárzás, a nevező

$$1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\vartheta^2 \approx \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\vartheta^2.$$

Végül

$$\frac{dP}{d\Omega} = F(\gamma\vartheta), \quad \text{ahol,} \quad F(y) = 8 \frac{e^2 a^2}{\pi c^3} \gamma^8 \frac{y^2}{(1+y^2)^5} \quad (13.13)$$

Ha a szögeloszlást normáljuk, akkor azzal átlagot képezhetünk

$$\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = \frac{1}{\gamma}.$$

Azaz a sugárzás gyakorlatilag  $\Delta\vartheta = \frac{1}{\gamma}$  szögben tart szét, ezért valóban jogos volt a kis  $\vartheta$  sorfejtés.

- **szinkrotron**  $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$

Legyen  $\vartheta$  az  $\mathbf{R}$  és  $\mathbf{v}$  közötti szög (korábban  $\vartheta$  az  $\mathbf{R}$  és az  $\mathbf{a}$  közöttit jelölte).

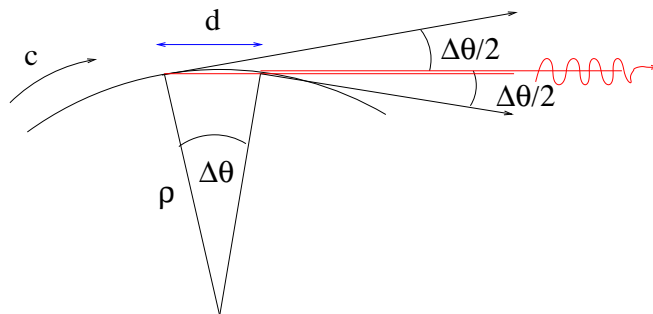
Az UR esetet vizsgáljuk,  $v \rightarrow c$ . Ekkor szintén skálázódik a szögeloszlás, azaz  $\gamma\vartheta = y$ -től függ, a lineáris gyorsítóétól azonban eltérő  $F(y)$  sűrűségfüggvényt kapunk. Itt is  $\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = \frac{1}{\gamma}$ .

**13.1. Házi feladat.** Határozzuk meg az  $F(y)$ -t szinkrotronra az UR limeszben.

180

(30%)

Mennyi ideig észleljük a sugárzást, ha adott irányból figyeljük, UR részecske esetén?



26. ábra. A szinkrotron sugárzás észlelése.

A pálya sugara legyen  $\rho$ . Adott irányú sebesség esetén a sugárzás a  $\Delta\vartheta \approx \frac{1}{\gamma}$  nyílásszögű kúpon belül észlelhető, ezért az észlelt jel kibocsájtásának kezdetétől a végéig a részecske éppen ekkora szögben fordul el a körpályán. Ezalatt  $d \approx \rho\Delta\vartheta = \frac{\rho}{\gamma}$  távolságot tesz meg. A kisugárzási idő és a jelhossz

$$\Delta t = \frac{d}{v}, \quad \lambda = \frac{cd}{v} - d = d \left( \frac{c}{v} - 1 \right) \approx \frac{d}{2\gamma^2} \approx \frac{\rho}{2\gamma^3}. \quad (13.14)$$

181

Az ehhez tartozó karakterisztikus frekvencia

$$\omega = \frac{c}{\lambda} = \frac{2c}{\rho} \gamma^3 \approx 2\omega_0 \gamma^3, \quad (13.15)$$

azaz az  $\omega_0 = \frac{c}{\rho}$  Larmor frekvencia  $\gamma^3$ -szöröse is megjelenik a spektrumban. Pl.  $\gamma = 2 \cdot 10^4$  és  $\omega_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$  esetén  $\omega \approx 2.4 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1}$  ami körülbelül 16keV-es röntgen sugárzásnak felel meg.

## 13.2. Sugárzási visszahatás

Kis sebességekre láttuk

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} a^2. \quad (13.16)$$

Milyen erőhatásnak felel meg az energiaveszteség? Integráljuk az impulzus változását egy trajektória mentén:

$$\int m \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{r} = \int m \dot{\mathbf{v}} v dt = \frac{mv^2}{2} \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt \quad (13.17)$$

182

Fejtsük ki a második integrált:

$$\int a^2 dt = \int \mathbf{a} \dot{\mathbf{v}} dt = \mathbf{a} \mathbf{v} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int \mathbf{v} \dot{\mathbf{a}} dt = \mathbf{a} \mathbf{v} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int \dot{\mathbf{a}} dr. \quad (13.18)$$

Periodikus mozgásnál  $t_2 = t_1 + T$  és az első tag eltűnik

$$\frac{mv^2}{2} \Big|_{t_1}^{t_1+T} = \int \mathbf{F} dr + \frac{2e^2}{3c^3} \int \dot{\mathbf{a}} dr. \quad (13.19)$$

A fentiek teljesülnek, ha

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\mathbf{a}}, \quad (13.20)$$

ez a sugárzasi visszahatás nemrelativisztikus egyenlete.

**13.2. Házi feladat.** *Mutassuk meg, hogy nemperiodikusan mozgó, egyenletesen töltött, kicsi  $r_0$  sugarú gömbbel modellezett részecske sugárzasi visszahatása*

$$\left( m + \frac{2e^2}{3c^2} \int \frac{d^3 r d^3 r'}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \mathbf{a} = \mathbf{F} + \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\mathbf{a}} + \mathcal{O}(r_0). \quad (13.21)$$

(45%)

### 13.3. Természetes vonalszélesség

Tekintsük a molekulában kötött elektront oszcillátornak (Lorentz gondolatmenete)

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \alpha \ddot{x}, \quad \alpha = \frac{2e^2}{3mc^3} \ll \frac{1}{\omega_0}, \quad (13.22)$$

s keressük a megoldást az  $x = x_0 e^{i\omega t}$  alakban

$$\omega^2 = \omega_0^2 + i\alpha\omega^3 \Rightarrow \omega \approx \omega_0 + i\frac{\alpha}{2}\omega_0^2 = \omega_0 + i\gamma. \quad (13.23)$$

Innen a  $t = 0$ -ban az  $x_0$ -ba kitérített, majd elengedett elektronra

$$x(t) = x_0 e^{i\omega_0 t - \gamma t} \Rightarrow x_\omega = x_0 \int_0^\infty e^{-i\omega t + i\omega_0 t - \gamma t} dt = \frac{x_0}{i(\omega - \omega_0) + \gamma} \quad (13.24)$$

$$\Rightarrow |x_\omega|^2 = \frac{x_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}.$$

Numerikusan  $\alpha \approx 10^{-24}$ s, látható fényre pl.  $\lambda_0 = 0.5 \mu\text{m}$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \approx 4 \cdot 10^{15} \text{s}^{-1}$ ,  $\gamma = \frac{\alpha\omega_0^2}{2} = 0,7 \cdot 10^7 \text{s}^{-1}$ , koherenciaidő  $\tau = \frac{1}{\gamma} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{s}$ , hossz  $l = c\tau = 42 \text{m}$ .

## 13.4. Öngyorsítás

Állandó térben az effektív mozgásegyenlet általános megoldása

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m} + \alpha \dot{x} \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 + x_1 e^{t/\alpha}. \quad (13.25)$$

Az utolsó tag divergál, ilyet nem figyeltek meg, ezért a valóságban  $x_1 = 0$ . NB: Az effektív egyenlet csak kis sebességekre áll fenn.

## 13.5. Dirac-féle mozgásegyenlet

Állítsuk elő a visszahatás effektív mozgásegyenletét kovariánsan. Induljunk ki az

$$\frac{du^i}{d\tau} = w^i = \frac{1}{m} F^i + \alpha \left( \frac{dw^i}{d\tau} + \Delta^i \right) \quad (13.26)$$

alakból, ahol  $F^i$  a külső erőket reprezentáló négyeserő, és az  $\alpha$ -val szorzott tag a sugárzási visszahatás. Az ismeretlen  $\Delta^i$ -t határozzuk meg. A nemrelativisztikus egyenletet akkor kapjuk vissza, ha kis sebességekre a  $\Delta^a$  tér-komponensek eltűnnek. A nulladik

185

komponenst is meghatározhatjuk. Mint már láttuk

$$\frac{du^0}{d\tau} = c \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma^4 \frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{c} = w^0, \quad (13.27)$$

ez eltűnik, ha  $v \rightarrow 0$ , a nemrelativisztikus limeszben a mozgásegyenlet 0. komponense tehát zérus. Mivel

$$\frac{dw^0}{d\tau} \approx \frac{a^2}{c}, \quad (13.28)$$

ezt zérussá a  $\Delta^0 \approx -\frac{a^2}{c}$  kompenzálja. A feltételeinket tehát kis  $v$ -re teljesíti  $\Delta^i \approx -\frac{a^2}{c^2} u^i$ . Relativisztikus sebességekre ezt (13.4) alapján kovariánsan a

$$\Delta^i = w^j w_j \frac{u^i}{c^2}$$

alakban terjeszthetjük ki. Ilymódon kapjuk a Dirac-féle mozgásegyenletet

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{1}{m} F^i + \alpha \left( \frac{dw^i}{d\tau} + u^i \frac{w^j w_j}{c^2} \right). \quad (13.29)$$

**13.3. Házi feladat.** Írjuk fel a Dirac mozgásegyenletet labor rendszerben! Milyen alakot kapunk az  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{v} \parallel \dot{\mathbf{a}} \parallel \mathbf{F}$  speciális esetben? (25%)

Kimutatható, hogy a Dirac mozgásegyenletnek is van öngyorsító megoldása. Ezzel elér-

186

tük a klasszikus fizika határait.

### 13.6. Cserenkov sugárzás

Közegben gyorsan haladó töltés jellegzetes szögben sugároz akkor is, ha nincs gyorsulása. A hullámegyenlet labor rendszerben pontszerű forrással

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (0, 0, v), \quad (13.30)$$

ahol

$$\rho = -e\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt).$$

Vizsgáljuk a  $z$  komponenst

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} A^\omega(\mathbf{r}). \quad (13.31)$$

Az  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  jelöléssel (13.30) alakja

$$\Delta A^\omega + \frac{n^2\omega^2}{c^2} A^\omega = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\delta(x)\delta(y)}_{\frac{\delta(r)}{2\pi r}} e^{-\frac{i\omega z}{v}}. \quad (13.32)$$

Ez a Bessel-féle differenciálegyenlet, ha  $r > 0$ . Nagy távolságokra

$$A^\omega(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}} e^{-\frac{i\omega z}{v}},$$

ahol az amplitúdó eleget tesz az

$$u''(r) + s^2 u(r) = 0, \quad s^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2} \quad (13.33)$$

egyenletnek. Megoldása

$$u(r) = u_0 e^{\pm isr}, \quad (13.34)$$

a radiális hullám lecseng (a divergens megoldás nemfizikai), ha  $\frac{c}{n} > v$ , és oszillál, ha  $\frac{c}{n} < v$ . Innen

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{u_\omega}{\sqrt{r}} e^{i\omega(t - \frac{z}{v} \pm \frac{sr}{\omega})}, \quad (13.35)$$

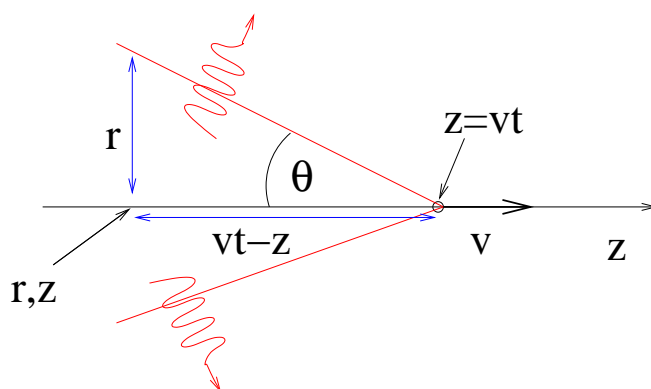
ahol a  $-$  előjel adja a kifelé terjedő hullámot (állandó fázis növekvő  $r$ -rel). A Cserenkov sugárzás hullámfrontjának a haladási iránnyal bezárt szöge

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{r}{vt - z} = \frac{\omega}{sv} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1}}, \quad (13.36)$$

innen az adott közegben elérhető a leglaposabb szög

$$\operatorname{tg}\vartheta_{\min} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (13.37)$$

A  $c/n$  határsebességnél a front merőleges  $\mathbf{v}$ -re, a részecskével együtt halad, ennél kisebb sebességnél nincs effektus.



27. ábra. Cserenkov sugárzás hullámfrontja.

## 14. Ponttöltések kölcsönhatása

A töltések által keltett tereket kifejezzük a töltések koordinátaival, innen a töltésekre effektív egyenlet írható fel.

### 14.1. Effektív hatás

Induljunk ki az ismert hatásokból ( $F^{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}$ )

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ij} F^{ij} d^4x, \quad (14.1)$$

$$S_{\text{I}} = -\frac{1}{c^2} \int j^i A_i d^4x. \quad (14.2)$$



Mint láttuk korábban, innen az  $A_i$  szerinti variálással kapjuk

$$F^{ij}_{,j} = -\frac{4\pi}{c}j^i, \quad (14.3)$$

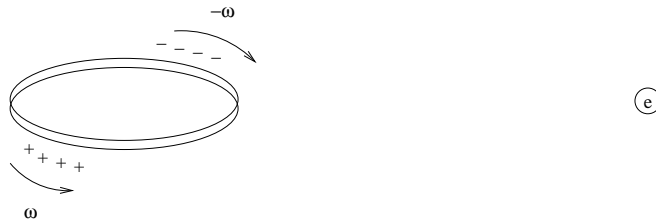
$$\Rightarrow \int F_{ij}F^{ij}d^4x = 2 \int A_{j,i}F^{ij}d^4x = -2 \int A_jF^{ij}_{,i}d^4x = \frac{8\pi}{c} \int A_jj^j d^4x, \quad (14.4)$$

$$\Rightarrow S_I^{\text{eff}} = S_I + S_{\text{EM}} = -\frac{1}{2c^2} \int A_i j^i d^4x, \quad (14.5)$$

s az utolsó kifejezésbe az áram által keltett tér a Liénard-Wiechert formula alapján beírandó. Labor rendszerben az effektív Lagrange függvény

$$L_I^{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int dV \left( \frac{1}{c} \mathbf{j} \mathbf{A} - \rho \Phi \right). \quad (14.6)$$

## 14.2. Paradoxon



28. ábra. Elektromosan pontonként semleges mágneses dipól,  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ . Az időben változó erősségű dipól ( $\dot{\omega} \neq 0$ ) a próbatöltésre elektromos erővel hat.

Példa: egymáshoz közeli, ellentétesen töltött, egymással szemben forgó, lassuló gyűrűk. A változó mágneses tér elektromos teret kelt, mely egy (távoli) próbatöltésre erőt gyakorol.

A II. vákuum Maxwell-egyenletet és a  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  alapján

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (14.7)$$

Coulomb mértékben a mágneses dipól által keltett vektorpotenciál

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (14.8)$$

Innen a próbatöltésre ható erő

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c^2} \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{M}}}{r^3}. \quad (14.9)$$

**Milyen erővel hat vissza a nyugvó próbatöltés?** Látszólag ilyen erő nincs, mert a dipól pontonként elektromosan semleges, s a próbatöltés mágneses teret nem kelt. Ez azt jelentené, hogy magára hagyva a rendszert, annak teljes impulzusa változna.

### 14.3. A Coulomb kölcsönhatás első relativisztikus korrekciója: Breit–Darwin formula

Két részecske kölcsönhatását vizsgáljuk. Az önkölcsönhatással nem foglalkozunk, azt az egyrészecske Lagrange függvényhez értjük. Az effektív kölcsönhatás

$$L_I^{\text{eff}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} \int dV \left( \frac{1}{c} \mathbf{j}_1 \mathbf{A}_2 + \frac{1}{c} \mathbf{j}_2 \mathbf{A}_1 - \varrho_1 \Phi_2 - \varrho_2 \Phi_1 \right). \quad (14.10)$$

A vezető relativisztikus korrekcióhoz elég a vektorpotenciált a Biot–Savart törvényből számítani,

$$\mathbf{A}_i = \frac{1}{c} \frac{e_i \mathbf{v}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (14.11)$$

Az áram formulája

$$\mathbf{j}_1 = e_1 \mathbf{v}_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad (14.12)$$

ahonnan szimmetrikus kifejezést kapunk

$$2L_{12}^A = \int dV \frac{1}{c} \mathbf{j}_1 \mathbf{A}_2 = \frac{e_1 e_2}{c^2} \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{R_{12}} = 2L_{21}^A. \quad (14.13)$$

A skalár potenciálban a Liénard–Wiechert formula első rendjéig el kell mennünk. Hasz-

náljuk az  $R' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|$  és  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|$  jelölést

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}, t) &= e \int dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{R'}{c}\right)}{R'} \\
&\approx e \int \frac{dt'}{R'} \left( \delta(t - t') - \delta'(t - t') \frac{R'}{c} + \frac{1}{2} \delta''(t - t') \frac{R'^2}{c^2} \right) \\
&= e \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \right). \tag{14.14}
\end{aligned}$$

Az első tag adja a Coulomb energiát, a második annak vezető korrekcióját

$$\begin{aligned}
-2L_{12}^{\Phi} = \int dV \varrho_1 \Phi_2 &= e_2 \int dV \frac{\varrho_1(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \frac{e_2}{2c^2} \int dV \varrho_1(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)|}{\partial t^2} \\
&= \frac{e_1 e_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - 2\Delta L_{12}^{\Phi} \tag{14.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Delta L_{12}^{\Phi} &= \frac{e_2}{2c^2} \int dV \frac{\partial \varrho_1}{\partial t} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{\partial t} + \text{teljes időderivált} \\
&= -\frac{e_2}{2c^2} \int dV (\text{div} \mathbf{j}_1) \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{\partial t} + \dots \\
&= \frac{e_2}{2c^2} \int dV \mathbf{j}_1 \cdot \text{grad} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{\partial t} + \text{felületi tag} + \dots \tag{14.16}
\end{aligned}$$

Kiszámítjuk a gradienst

$$\frac{\partial \text{grad} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)|}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)|} = -\frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \frac{\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}, \tag{14.17}$$

végül nyerjük, az  $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  jelöléssel és az áram formulájával

$$2\Delta L_{12}^{\Phi} = \frac{e_1 e_2}{2c^2} \left\{ -\frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{R_{12}} + \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{R}_{12})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3} \right\}. \tag{14.18}$$

A vezető vektorpotenciális járulék éppen az első tag -2 szerese, ezzel

$$2(\Delta L_{12}^{\Phi} + L_{12}^A) = \frac{e_1 e_2}{2c^2} \left\{ \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{R_{12}} + \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{R}_{12})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3} \right\}. \tag{14.19}$$

Mivel ez szimmetrikus a két részecske felcserélésével szemben, a teljes effektív kölcsön-

hatási Lagrange függvény a vezető relativisztikus korrekcióval

$$L_1^{\text{eff}} = 2(L_{12}^{\Phi} + L_{12}^A) = -\frac{e_1 e_2}{R_{12}} + \frac{e_1 e_2}{2c^2} \frac{1}{R_{12}} \{ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_{12}) (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_{12}) \}, \quad (14.20)$$

ahol  $\mathbf{n}_{12}$  az  $\mathbf{R}_{12}$  irányú egységvektor. Az effektív kölcsönhatás sebességfüggő! Darwin vezette le, Breit kvantummechanikában alkalmazta.

A kinetikus Lagrange függvény hasonló rendig egy tömegpontra

$$L_{\text{kin}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + mc^2 \approx \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^4}{8c^2}. \quad (14.21)$$

**14.1. Házi feladat.** *Határozzuk meg a Hamilton függvényben a kölcsönhatás perturbációját! (10%)*

## 14.4. Paradoxon?

A Lagrange függvény invariáns a translációval szemben, ezért a teljes impulzus megmarad.

Megmaradási tételek az energia-impulzus tenzorral:  $T^{ij}_{,j} = 0$

$$E = \int T^{00} d^3x, \quad \dot{E} = \int \partial_t T^{00} d^3x = -c \int \nabla_a T^{0a} d^3x = 0 \quad (14.22)$$

$$P^a = c^{-1} \int T^{a0} d^3x, \quad \dot{P}^a = 0 \quad (14.23)$$

$$X^a = \frac{1}{E} \int x^a T^{00} d^3x, \quad \dot{X}^a = -\frac{c}{E} \int x^a \nabla_b T^{0b} d^3x = \frac{c}{E} \int T^{0a} d^3x = c^2 P^a / E \quad (14.24)$$

A teljes impulzus megmaradásából az  $X^a$  „energiaközéppont” egyenletes translációja következik. Ha ez nyugalomban volt kezdetben, akkor úgy is marad.

E megfontolások a Breit-Darwin mechanikában is érvényesek maradnak.

**14.2. Házi feladat.** (25%) *Számítsuk ki a próbatöltésre ható erőt! A dipólt alkotó töltések helye  $\mathbf{r}_i$ , sebessége  $\mathbf{v}_i$ . A próbatöltésre:  $\mathbf{r}$  ( $r \gg r_i$ ),  $\mathbf{v}$  ( $v \ll v_i$ ). Mutassuk meg, hogy  $e$  közelítésben, továbbá az elektromos semlegességet a dipól minden helyén feltéve, a próbatöltés  $\mathbf{p}$  kanonikus impulzusával kapjuk*

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} + \frac{e}{2c^2 r^3} \sum_i e_i \mathbf{r} \times (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{M}}{r^3}. \quad (14.25)$$

**14.3. Házi feladat.** (25%) *Mutassuk meg, hogy a mágnes energiaközéppontjának időbeli megváltozása*

$$\frac{E_m}{c^2} \dot{\mathbf{X}}_m = \mathbf{P}_m - \frac{e}{c} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{M}}{r^3}. \quad (14.26)$$