

A Dirac egyenlet pozitívitas-tartása

Barankai Norbert

MTA-ELTE Theoretical Physics Research Group



- 1 Bevezetés
 - Pályaintegrálok és szimuláció
 - A sakktábla modell
 - Perzisztens véletlen bolyongás $1 + 1$ dimenzióban
 - Bolyongások magasabb dimenzióban
- 2 A Dirac-egyenlet pozitívitas-tartása
 - Az egyenlet
 - Pozitívitas-tartás és Bochner tétele
 - Az eredmény és a bizonyítás vázolata
- 3 Konklúzió

Outline

- 1 Bevezetés
 - Pályaintegrálok és szimuláció
 - A sakktábla modell
 - Perzisztens véletlen bolyongás $1 + 1$ dimenzióban
 - Bolyongások magasabb dimenzióban
- 2 A Dirac-egyenlet pozitívitas-tartása
 - Az egyenlet
 - Pozitívitas-tartás és Bochner tétele
 - Az eredmény és a bizonyítás vázolata
- 3 Konklúzió

Feynman-féle pályaintegrál

Az egyrészecskés Schrödinger-egyenlet:

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x},t) = \left(-(\hbar^2/2m)\Delta + V(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)$$

Feynman mély meglátása:

$$K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = \int_{\mathbf{q}(t_{1,2})=\mathbf{x}_{1,2}} \mathcal{D}\mathbf{q}(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt\right)$$

- Rendkívül hasznos eszköz relativisztikus térelméletek kvantálására,
- a pályák okos mintavételezésével, lehetővé teszi a propagátor becslését.

Feynman-féle pályaintegrál

Az egyrészecskés Schrödinger-egyenlet:

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x},t) = \left(-(\hbar^2/2m)\Delta + V(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)$$

Feynman mély meglátása:

$$K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = \int_{\mathbf{q}(t_{1,2})=\mathbf{x}_{1,2}} \mathcal{D}\mathbf{q}(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt\right)$$

- Rendkívül hasznos eszköz relativisztikus térelméletek kvantálására,
- a pályák okos mintavételezésével, lehetővé teszi a propagátor becslését.

Feynman-féle pályaintegrál

Az egyrészecskés Schrödinger-egyenlet:

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x},t) = \left(-(\hbar^2/2m)\Delta + V(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)$$

Feynman mély meglátása:

$$K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = \int_{\mathbf{q}(t_{1,2})=\mathbf{x}_{1,2}} \mathcal{D}\mathbf{q}(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt\right)$$

- Rendkívül hasznos eszköz relativisztikus térelméletek kvantálására,
- a pályák okos mintavételezésével, lehetővé teszi a propagátor becslését.

Feynman-féle pályaintegrál

Az egyrészecskés Schrödinger-egyenlet:

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x},t) = \left(-(\hbar^2/2m)\Delta + V(\mathbf{x},t)\right)\psi(\mathbf{x},t)$$

Feynman mély meglátása:

$$K(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = \int_{\mathbf{q}(t_{1,2})=\mathbf{x}_{1,2}} \mathcal{D}\mathbf{q}(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt\right)$$

- Rendkívül hasznos eszköz relativisztikus térelméletek kvantálására,
- a pályák okos mintavételezésével, **lehetővé teszi a propagátor becslését.**

Feynman–Kac-tétel

Feynman munkája által inspirálva Kac bebizonyította, hogy a

$$\partial_t u(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 u(x, t) - V(x, t)u(x, t) = 0,$$

parabolikus egyenlet - ha adottak $V(x, t)$, σ^2 és a végfeltétel $u(x, T) = v(x)$ - megoldható a

$$u(x, t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T V(X_\tau, \tau) d\tau} v(X_T) \mid X_t = x \right]$$

feltételes várható érték kiszámításával, melyet a $dX_t = \sigma dW$ Wiener-folyamat pályaterében kell kiértékelni.

A Wiener folyamat szimulációja és az $\int_t^T V(X_\tau, \tau) d\tau$ kiszámolása útján lehetővé teszi az $u(x, t)$ becslését.

Feynman–Kac-tétel

Feynman munkája által inspirálva Kac bebizonyította, hogy a

$$\partial_t u(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 u(x, t) - V(x, t)u(x, t) = 0,$$

parabolikus egyenlet - ha adottak $V(x, t)$, σ^2 és a végfeltétel $u(x, T) = v(x)$ - megoldható a

$$u(x, t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T V(X_\tau, \tau) d\tau} v(X_T) \middle| X_t = x \right]$$

feltételes várható érték kiszámításával, melyet a $dX_t = \sigma dW$ Wiener-folyamat pályaterében kell kiértékelni.

A Wiener folyamat szimulációja és az $\int_t^T V(X_\tau, \tau) d\tau$ kiszámolása útján lehetővé teszi az $u(x, t)$ becslését.

Feynman–Kac-tétel

Feynman munkája által inspirálva Kac bebizonyította, hogy a

$$\partial_t u(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 u(x, t) - V(x, t)u(x, t) = 0,$$

parabolikus egyenlet - ha adottak $V(x, t)$, σ^2 és a végfeltétel $u(x, T) = v(x)$ - megoldható a

$$u(x, t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T V(X_\tau, \tau) d\tau} v(X_T) \middle| X_t = x \right]$$

feltételes várható érték kiszámításával, melyet a $dX_t = \sigma dW$ Wiener-folyamat pályaterében kell kiértékelni.

A Wiener folyamat szimulációja és az $\int_t^T V(X_\tau, \tau) d\tau$ kiszámolása útján lehetővé teszi az $u(x, t)$ becslését.

Outline

- 1 Bevezetés
 - Pályaintegrálok és szimuláció
 - **A sakktábla modell**
 - Perzisztens véletlen bolyongás $1 + 1$ dimenzióban
 - Bolyongások magasabb dimenzióban
- 2 A Dirac-egyenlet pozitívítás-tartása
 - Az egyenlet
 - Pozitívítás-tartás és Bochner tétele
 - Az eredmény és a bizonyítás vázolata
- 3 Konklúzió

A saktábla modell

Hogyan reprezentálható pályaintegrál formájában egy 1/2 spinű részecske időfejlődése, melyet a tömeges Dirac-egyenlet ír le?

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

Feynman elképzelése:

- vezessünk be belső állapotokat,
- közelítsük a propagátort a diszkrét téridőn úgy, hogy a téridő-rács útjaihoz komplex fázisokat rendelünk,
- végezzük el a formális kontinuum limeszt.

A saktábla modell

Hogyan reprezentálható pályaintegrál formájában egy $1/2$ spinű részecske időfejlődése, melyet a tömeges Dirac-egyenlet ír le?

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

Feynman elképzelése:

- vezessünk be belső állapotokat,
- közelítsük a propagátort a diszkrét téridőn úgy, hogy a téridő-rács útjaihoz komplex fázisokat rendelünk,
- végezzük el a formális kontinuum limeszt.

A saktábla modell

Hogyan reprezentálható pályaintegrál formájában egy 1/2 spinű részecske időfejlődése, melyet a tömeges Dirac-egyenlet ír le?

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

Feynman elképzelése:

- vezessünk be belső állapotokat,
- közelítsük a propagátort a diszkrét téridőn úgy, hogy a téridő-rács útjaihoz komplex fázisokat rendelünk,
- végezzük el a formális kontinuum limeszt.

A saktábla modell

Hogyan reprezentálható pályaintegrál formájában egy $1/2$ spinű részecske időfejlődése, melyet a tömeges Dirac-egyenlet ír le?

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

Feynman elképzelése:

- vezessünk be belső állapotokat,
- közelítsük a propagátort a diszkrét téridőn úgy, hogy a téridő-rács útjaihoz komplex fázisokat rendelünk,
- végezzük el a formális kontinuum limeszt.

A saktábla modell

Hogyan reprezentálható pályaintegrál formájában egy $1/2$ spinű részecske időfejlődése, melyet a tömeges Dirac-egyenlet ír le?

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

Feynman elképzelése:

- vezessünk be belső állapotokat,
- közelítsük a propagátort a diszkrét téridőn úgy, hogy a téridő-rács útjaihoz komplex fázisokat rendelünk,
- végezzük el a formális kontinuum limeszt.

A saktábla modell

1 + 1 dimenzióban:

- legyen a részecske belső állapota a t időpillanatban $\omega(t) = +1$ (-1), ha pillanatnyi sebessége pozitív (negatív)
- a következő lépésben a részecske $x(t) \in \mathbb{Z}$ helyről $x(t+1) = x(t) + \omega(t)$ helyre mozdul, de amikor megérkezik, akkor megváltoztathatja a belső állapotát
- legyen az l -t a k -val T lépésben összekötő, ω kezdeti (belső) állapotú, τ végállapotú pályák halmaza $\mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$
- ha $P \in \mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$, legyen a fordulások száma $R(P)$

A saktábla modell

1 + 1 dimenzióban:

- legyen a részecske belső állapota a t időpillanatban $\omega(t) = +1$ (-1), ha pillanatnyi sebessége pozitív (negatív)
- a következő lépésben a részecske $x(t) \in \mathbb{Z}$ helyről $x(t+1) = x(t) + \omega(t)$ helyre mozdul, de amikor megérkezik, akkor megváltoztathatja a belső állapotát
- legyen az l -t a k -val T lépésben összekötő, ω kezdeti (belső) állapotú, τ végállapotú pályák halmaza $\mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$
- ha $P \in \mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$, legyen a fordulások száma $R(P)$

A saktábla modell

1 + 1 dimenzióban:

- legyen a részecske belső állapota a t időpillanatban $\omega(t) = +1$ (-1), ha pillanatnyi sebessége pozitív (negatív)
- a következő lépésben a részecske $x(t) \in \mathbb{Z}$ helyről $x(t+1) = x(t) + \omega(t)$ helyre mozdul, de amikor megérkezik, akkor megváltoztathatja a belső állapotát
- legyen az l -t a k -val T lépésben összekötő, ω kezdeti (belső) állapotú, τ végállapotú pályák halmaza $\mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$
- ha $P \in \mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$, legyen a fordulások száma $R(P)$

A saktábla modell

1 + 1 dimenzióban:

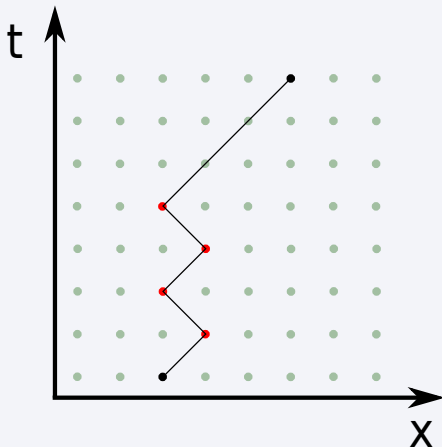
- legyen a részecske belső állapota a t időpillanatban $\omega(t) = +1$ (-1), ha pillanatnyi sebessége pozitív (negatív)
- a következő lépésben a részecske $x(t) \in \mathbb{Z}$ helyről $x(t+1) = x(t) + \omega(t)$ helyre mozdul, de amikor megérkezik, akkor megváltoztathatja a belső állapotát
- legyen az l -t a k -val T lépésben összekötő, ω kezdeti (belső) állapotú, τ végállapotú pályák halmaza $\mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$
- ha $P \in \mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$, legyen a fordulások száma $R(P)$

A sakktábla modell

1 + 1 dimenzióban:

- legyen a részecske belső állapota a t időpillanatban $\omega(t) = +1$ (-1), ha pillanatnyi sebessége pozitív (negatív)
- a következő lépésben a részecske $x(t) \in \mathbb{Z}$ helyről $x(t+1) = x(t) + \omega(t)$ helyre mozdul, de amikor megérkezik, akkor megváltoztathatja a belső állapotát
- legyen az l -t a k -val T lépésben összekötő, ω kezdeti (belső) állapotú, τ végállapotú pályák halmaza $\mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$
- ha $P \in \mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)$, legyen a fordulások száma $R(P)$

A sakktábla modell



A sakktábla modell

Feynman javaslata

Sakktábla propagátor

$$K_{\tau\omega}(k\Delta x, l\Delta x, T\Delta t) \approx \sum_{P \in \mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)} \left(i \frac{mc^2}{\hbar} \Delta t \right)^{R(P)}$$

Az egyenlet jobb oldalára T -ben rekurziót írhatunk fel. Ezt követően kiszámoljuk a $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x/\Delta t \rightarrow c$ skálázási limeszt. Az eredmény a Dirac-egyenlet 1 + 1 dimenzióban, a Weyl-reprezentációban.

A sakktábla modell

Feynman javaslata

Sakktábla propagátor

$$K_{\tau\omega}(k\Delta x, l\Delta x, T\Delta t) \approx \sum_{P \in \mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)} \left(i \frac{mc^2}{\hbar} \Delta t \right)^{R(P)}$$

Az egyenlet jobb oldalára T -ben rekurziót írhatunk fel. Ezt követően kiszámoljuk a $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x/\Delta t \rightarrow c$ skálázási limeszt. Az eredmény a Dirac-egyenlet 1 + 1 dimenzióban, a Weyl-reprezentációban.

A sakktábla modell

Feynman javaslata

Sakktábla propagátor

$$K_{\tau\omega}(k\Delta x, l\Delta x, T\Delta t) \approx \sum_{P \in \mathcal{P}_{l \rightarrow k}^{\omega \rightarrow \tau}(T)} \left(i \frac{mc^2}{\hbar} \Delta t \right)^{R(P)}$$

Az egyenlet jobb oldalára T -ben rekurziót írhatunk fel. Ezt követően kiszámoljuk a $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x/\Delta t \rightarrow c$ skálázási limeszt. Az eredmény a Dirac-egyenlet $1 + 1$ dimenzióban, a Weyl-reprezentációban.

A saktábla modell

Összefoglalva Feynman saját szavaival:

Feynman Nobel-előadása (kivonat)

(...) Another problem on which I struggled very hard, was to represent relativistic electrons with this new quantum mechanics. (...) I was very much encouraged by the fact that in one space dimension, I did find a way of giving an amplitude to every path by limiting myself to paths, which only went back and forth at the speed of light. (...)

Outline

- 1 **Bevezetés**
 - Pályaintegrálok és szimuláció
 - A sakktábla modell
 - **Perzisztens véletlen bolyongás 1 + 1 dimenzióban**
 - Bolyongások magasabb dimenzióban
- 2 A Dirac-egyenlet pozitívitas-tartása
 - Az egyenlet
 - Pozitívitas-tartás és Bochner tétele
 - Az eredmény és a bizonyítás vázolata
- 3 Konklúzió

Perzisztens véletlen bolyongás

Le tudjuk fordítani a sakktábla modellt a sztochasztikus folyamatok nyelvére?

Egy részecske két - + és - - belső állapottal rendelkezik. Ha a + (-) állapotban van, akkor Δt idő alatt Δx távolsággal jobbra (balra) lép és ezt addig folytatja, míg meg nem változtatja a belső állapotát. A belső állapot megváltoztatásának valószínűsége $\lambda \Delta t$. A folyamatot leíró Kolmogorov-egyenlet:

$$p_{\pm}(x, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) p_{\pm}(x \mp \Delta x, t) + \lambda \Delta t p_{\pm}(x \pm \Delta x, t)$$

A $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x / \Delta t \rightarrow c$ (ballisztikus) limesz

Dirac-egyenlet valós együtthatókkal?

$$\partial_t p = \lambda (\sigma_1 - \mathbb{1}_2) p - c \sigma_3 \partial_x p$$

Perzisztens véletlen bolyongás

Le tudjuk fordítani a sakktábla modellt a sztochasztikus folyamatok nyelvére?

Egy részecske két - + és - - belső állapottal rendelkezik. Ha a + (-) állapotban van, akkor Δt idő alatt Δx távolsággal jobbra (balra) lép és ezt addig folytatja, míg meg nem változtatja a belső állapotát. A belső állapot megváltoztatásának valószínűsége $\lambda \Delta t$. A folyamatot leíró Kolmogorov-egyenlet:

$$p_{\pm}(x, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) p_{\pm}(x \mp \Delta x, t) + \lambda \Delta t p_{\pm}(x \pm \Delta x, t)$$

A $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x / \Delta t \rightarrow c$ (ballisztikus) limesz

Dirac-egyenlet valós együtthatókkal?

$$\partial_t p = \lambda (\sigma_1 - \mathbb{1}_2) p - c \sigma_3 \partial_x p$$

Perzisztens véletlen bolyongás

Le tudjuk fordítani a sakktábla modellt a sztochasztikus folyamatok nyelvére?

Egy részecske két - + és - - belső állapottal rendelkezik. Ha a + (-) állapotban van, akkor Δt idő alatt Δx távolsággal jobbra (balra) lép és ezt addig folytatja, míg meg nem változtatja a belső állapotát. A belső állapot megváltoztatásának valószínűsége $\lambda \Delta t$. A folyamatot leíró Kolmogorov-egyenlet:

$$p_{\pm}(x, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) p_{\pm}(x \mp \Delta x, t) + \lambda \Delta t p_{\pm}(x \pm \Delta x, t)$$

A $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x / \Delta t \rightarrow c$ (ballisztikus) limesz

Dirac-egyenlet valós együtthatókkal?

$$\partial_t p = \lambda (\sigma_1 - \mathbb{1}_2) p - c \sigma_3 \partial_x p$$

Perzisztens véletlen bolyongás

Le tudjuk fordítani a sakktábla modellt a sztochasztikus folyamatok nyelvére?

Egy részecske két - + és - - belső állapottal rendelkezik. Ha a + (-) állapotban van, akkor Δt idő alatt Δx távolsággal jobbra (balra) lép és ezt addig folytatja, míg meg nem változtatja a belső állapotát. A belső állapot megváltoztatásának valószínűsége $\lambda \Delta t$. A folyamatot leíró Kolmogorov-egyenlet:

$$p_{\pm}(x, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) p_{\pm}(x \mp \Delta x, t) + \lambda \Delta t p_{\pm}(x \pm \Delta x, t)$$

A $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x / \Delta t \rightarrow c$ (ballisztikus) limesz

Dirac-egyenlet valós együtthatókkal?

$$\partial_t p = \lambda (\sigma_1 - \mathbb{1}_2) p - c \sigma_3 \partial_x p$$

A bolyongás és a Dirac egyenlet

Kapcsolat a komplex együtthatójú Dirac-egyenlettel:

Legyen $\lambda \mapsto mc^2/(i\hbar)$ és vezessük be ψ -t a $\psi(x,t) = e^{\lambda t} \sigma_1 p(x,t)$ definícióval. Ekkor

$$i\hbar(\sigma_1 \partial_t + c\varepsilon \partial_x)\psi = mc^2 \psi,$$

ahol $\varepsilon = i^{-1} \sigma_2$.

Mivel σ_1 és ε generálja $Cl_{1,1}(\mathbb{R})$ -t és a királis projekciók $P_L = \frac{1}{2}(1 - \sigma_1 \varepsilon)$, $P_R = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \varepsilon)$ diagonálmátrixok, azt látjuk, hogy a fenti egyenlet éppen a tömeges Dirac-egyenlet 1 + 1 dimenzióban, a Weyl- reprezentációban.

A bolyongás és a Dirac egyenlet

Kapcsolat a komplex együtthatójú Dirac-egyenlettel:

Legyen $\lambda \mapsto mc^2/(i\hbar)$ és vezessük be ψ -t a $\psi(x,t) = e^{\lambda t} \sigma_1 p(x,t)$ definícióval. Ekkor

$$i\hbar(\sigma_1 \partial_t + c\varepsilon \partial_x) \psi = mc^2 \psi,$$

ahol $\varepsilon = i^{-1} \sigma_2$.

Mivel σ_1 és ε generálja $Cl_{1,1}(\mathbb{R})$ -t és a királis projekciók $P_L = \frac{1}{2}(1 - \sigma_1 \varepsilon)$, $P_R = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \varepsilon)$ diagonálmátrixok, azt látjuk, hogy a fenti egyenlet éppen a tömeges Dirac-egyenlet 1 + 1 dimenzióban, a Weyl- reprezentációban.

A bolyongás és a Dirac egyenlet

Kapcsolat a komplex együtthatójú Dirac-egyenlettel:

Legyen $\lambda \mapsto mc^2/(i\hbar)$ és vezessük be ψ -t a $\psi(x,t) = e^{\lambda t} \sigma_1 p(x,t)$ definícióval. Ekkor

$$i\hbar(\sigma_1 \partial_t + c\varepsilon \partial_x) \psi = mc^2 \psi,$$

ahol $\varepsilon = i^{-1} \sigma_2$.

Mivel σ_1 és ε generálja $Cl_{1,1}(\mathbb{R})$ -t és a királis projekciók $P_L = \frac{1}{2}(1 - \sigma_1 \varepsilon)$, $P_R = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \varepsilon)$ diagonálmátrixok, azt látjuk, hogy a fenti egyenlet éppen a tömeges Dirac-egyenlet 1 + 1 dimenzióban, a Weyl- reprezentációban.

A bolyongás és a Dirac egyenlet

Kapcsolat a komplex együtthatójú Dirac-egyenlettel:

Legyen $\lambda \mapsto mc^2/(i\hbar)$ és vezessük be ψ -t a $\psi(x,t) = e^{\lambda t} \sigma_1 p(x,t)$ definícióval. Ekkor

$$i\hbar(\sigma_1 \partial_t + c\varepsilon \partial_x) \psi = mc^2 \psi,$$

ahol $\varepsilon = i^{-1} \sigma_2$.

Mivel σ_1 és ε generálja $Cl_{1,1}(\mathbb{R})$ -t és a királis projekciók $P_L = \frac{1}{2}(1 - \sigma_1 \varepsilon)$, $P_R = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \varepsilon)$ diagonálmátrixok, azt látjuk, hogy a fenti egyenlet éppen a tömeges Dirac-egyenlet 1 + 1 dimenzióban, a Weyl- reprezentációban.

Outline

- 1 Bevezetés
 - Pályaintegrálok és szimuláció
 - A sakktábla modell
 - Perzisztens véletlen bolyongás $1 + 1$ dimenzióban
 - **Bolyongások magasabb dimenzióban**
- 2 A Dirac-egyenlet pozitívítás-tartása
 - Az egyenlet
 - Pozitívítás-tartás és Bochner tétele
 - Az eredmény és a bizonyítás vázolata
- 3 Konklúzió

A saktábla modell $1 < d$ térdimenzióban

Mi a helyzet magas térdimenziókban?

Feynman Nobel-előadása (kivonat)

(...) I dreamed that if I were clever, I would find a formula for the amplitude of a path that was beautiful and simple for three dimensions of space and one of time, which would be equivalent to the Dirac equation, and for which the four components, matrices, and all those other mathematical funny things would come out as a simple consequence - I have never succeeded in that either. But, I did want to mention some of the unsuccessful things on which I spent almost as much effort, as on the things that did work.

A $d = 2$ perzisztens bolyongás

Ha $d = 2$,

- a belső állapotok $++$, $+-$, $-+$ és $--$, melyek közti átmeneteket a Q mátrix írja le
- a Kolmogorov egyenlet felállítása után
- a $\Delta t \rightarrow 0$; $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$; $\Delta x/\Delta t, \Delta y/\Delta t \rightarrow c$ határátmenet elvégezhető.

A valószínűség időfejlődése:

$$\partial_t p = Lp - ce_1 \partial_x p - ce_2 \partial_y p,$$

ahol L a Q átmeneti mátrixszal jellemzett Markov folyamat infinitezimális generátora

$$e_1 = \mathbb{1}_2 \oplus (-\mathbb{1}_2) \quad e_2 = \sigma_3 \oplus \sigma_3$$

Nyilvánvalóan nem a Dirac-egyenlet.

A $d = 2$ perzisztens bolyongás

Ha $d = 2$,

- a belső állapotok $++$, $+-$, $-+$ és $--$, melyek közti átmeneteket a Q mátrix írja le
- a Kolmogorov egyenlet felállítása után
- a $\Delta t \rightarrow 0$; $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$; $\Delta x/\Delta t, \Delta y/\Delta t \rightarrow c$ határátmenet elvégezhető.

A valószínűség időfejlődése:

$$\partial_t p = Lp - ce_1 \partial_x p - ce_2 \partial_y p,$$

ahol L a Q átmeneti mátrixszal jellemzett Markov folyamat infinitezimális generátora

$$e_1 = \mathbb{1}_2 \oplus (-\mathbb{1}_2) \quad e_2 = \sigma_3 \oplus \sigma_3$$

Nyilvánvalóan nem a Dirac-egyenlet.

A $d = 2$ perzisztens bolyongás

Ha $d = 2$,

- a belső állapotok $++$, $+-$, $-+$ és $--$, melyek közti átmeneteket a Q mátrix írja le
- a Kolmogorov egyenlet felállítása után
- a $\Delta t \rightarrow 0$; $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$; $\Delta x/\Delta t, \Delta y/\Delta t \rightarrow c$ határátmenet elvégezhető.

A valószínűség időfejlődése:

$$\partial_t p = Lp - ce_1 \partial_x p - ce_2 \partial_y p,$$

ahol L a Q átmeneti mátrixszal jellemzett Markov folyamat infinitezimális generátora

$$e_1 = \mathbb{1}_2 \oplus (-\mathbb{1}_2) \quad e_2 = \sigma_3 \oplus \sigma_3$$

Nyilvánvalóan nem a Dirac-egyenlet.

A $d = 2$ perzisztens bolyongás

Ha $d = 2$,

- a belső állapotok $++$, $+-$, $-+$ és $--$, melyek közti átmeneteket a Q mátrix írja le
- a Kolmogorov egyenlet felállítása után
- a $\Delta t \rightarrow 0$; $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$; $\Delta x/\Delta t, \Delta y/\Delta t \rightarrow c$ határátmenet elvégezhető.

A valószínűség időfejlődése:

$$\partial_t p = Lp - ce_1 \partial_x p - ce_2 \partial_y p,$$

ahol L a Q átmeneti mátrixszal jellemzett Markov folyamat infinitezimális generátora

$$e_1 = \mathbb{1}_2 \oplus (-\mathbb{1}_2) \quad e_2 = \sigma_3 \oplus \sigma_3$$

Nyilvánvalóan nem a Dirac-egyenlet.

A $d = 2$ perzisztens bolyongás

Ha $d = 2$,

- a belső állapotok $++$, $+-$, $-+$ és $--$, melyek közti átmeneteket a Q mátrix írja le
- a Kolmogorov egyenlet felállítása után
- a $\Delta t \rightarrow 0$; $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$; $\Delta x/\Delta t, \Delta y/\Delta t \rightarrow c$ határátmenet elvégezhető.

A valószínűség időfejlődése:

$$\partial_t p = Lp - ce_1 \partial_x p - ce_2 \partial_y p,$$

ahol L a Q átmeneti mátrixszal jellemzett Markov folyamat infinitezimális generátora

$$e_1 = \mathbb{1}_2 \oplus (-\mathbb{1}_2) \quad e_2 = \sigma_3 \oplus \sigma_3$$

Nyilvánvalóan nem a Dirac-egyenlet.

Egy alternatív stratégia

Ahelyett, hogy a következő tervet követnénk:

- folyamat definiálása a rácson
- kontinuum limesz elvégzése

próbáljuk meg a következőt:

- válasszunk egy Clifford-algebra reprezentációt
- diszkrétizáljuk a Dirac-egyenletet
- nézzük meg, hogy képes-e sztochasztikus folyamatot leírni.

Egy konkrét példa: legyen $Cl_{3,0}(\mathbb{R})$ reprezentációja

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

Egy alternatív stratégia

Ahelyett, hogy a következő tervet követnénk:

- folyamat definiálása a rácson
- kontinuum limesz elvégzése

próbáljuk meg a következőt:

- válasszunk egy Clifford-algebra reprezentációt
- diszkrétizáljuk a Dirac-egyenletet
- nézzük meg, hogy képes-e sztochasztikus folyamatot leírni.

Egy konkrét példa: legyen $\mathcal{Cl}_{3,0}(\mathbb{R})$ reprezentációja

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

Egy alternatív stratégia

Ahelyett, hogy a következő tervet követnénk:

- folyamat definiálása a rácson
- kontinuum limesz elvégzése

próbáljuk meg a következőt:

- válasszunk egy Clifford-algebra reprezentációt
- diszkrétizáljuk a Dirac-egyenletet
- nézzük meg, hogy képes-e sztochasztikus folyamatot leírni.

Egy konkrét példa: legyen $\mathcal{Cl}_{3,0}(\mathbb{R})$ reprezentációja

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

Egy alternatív stratégia

Az egyenlet

$$\partial_t p = \lambda e_0 p - \alpha p - c\beta_1 e_1 \partial_x p - c\beta_2 e_2 \partial_y p$$

ahol λ , α , β_1 , β_2 és c konstansok. Diszkretizálás után

$$p_1(x, y, t + \Delta t) = q_{11,1} p_1(x, y, t) + q_{11,2} p_1(x, y - \Delta y, t) + q_{13} p_3(x, y, t) \\ + q_{14,1} p_4(x - \Delta x, y + \Delta y, t) + q_{14,2} p_4(x, y, t)$$

ahol

$$q_{11,1} = 1 - \alpha \Delta t - \frac{\beta_2 c}{\Delta x} \Delta t \quad q_{11,2} = \frac{\beta_2 c}{\Delta x} \Delta t \quad q_{13} = \lambda \Delta t \\ q_{14,1} = \frac{\beta_1 c}{\Delta x} \Delta t \quad q_{14,2} = -\frac{\beta_1 c}{\Delta x} \Delta t$$

ami biztosan nem tud sztochasztikus folyamat időfejlődését leírni.

Egy alternatív stratégia

Az egyenlet

$$\partial_t p = \lambda e_0 p - \alpha p - c\beta_1 e_1 \partial_x p - c\beta_2 e_2 \partial_y p$$

ahol λ , α , β_1 , β_2 és c konstansok. Diszkrétizálás után

$$p_1(x, y, t + \Delta t) = q_{11,1} p_1(x, y, t) + q_{11,2} p_1(x, y - \Delta y, t) + q_{13} p_3(x, y, t) \\ + q_{14,1} p_4(x - \Delta x, y + \Delta y, t) + q_{14,2} p_4(x, y, t)$$

ahol

$$q_{11,1} = 1 - \alpha \Delta t - \frac{\beta_2 c}{\Delta x} \Delta t \quad q_{11,2} = \frac{\beta_2 c}{\Delta x} \Delta t \quad q_{13} = \lambda \Delta t$$

$$q_{14,1} = \frac{\beta_1 c}{\Delta x} \Delta t \quad q_{14,2} = -\frac{\beta_1 c}{\Delta x} \Delta t$$

ami biztosan nem tud sztochasztikus folyamat időfejlődését leírni.

Egy alternatív stratégia

Az egyenlet

$$\partial_t p = \lambda e_0 p - \alpha p - c\beta_1 e_1 \partial_x p - c\beta_2 e_2 \partial_y p$$

ahol λ , α , β_1 , β_2 és c konstansok. Diszkrétizálás után

$$p_1(x, y, t + \Delta t) = q_{11,1} p_1(x, y, t) + q_{11,2} p_1(x, y - \Delta y, t) + q_{13} p_3(x, y, t) \\ + q_{14,1} p_4(x - \Delta x, y + \Delta y, t) + q_{14,2} p_4(x, y, t)$$

ahol

$$q_{11,1} = 1 - \alpha \Delta t - \frac{\beta_2 c}{\Delta x} \Delta t \quad q_{11,2} = \frac{\beta_2 c}{\Delta x} \Delta t \quad q_{13} = \lambda \Delta t$$

$$q_{14,1} = \frac{\beta_1 c}{\Delta x} \Delta t \quad q_{14,2} = -\frac{\beta_1 c}{\Delta x} \Delta t$$

ami biztosan nem tud sztochasztikus folyamat időfejlődését leírni.

- 1 Bevezetés
 - Pályaintegrálok és szimuláció
 - A sakktábla modell
 - Perzisztens véletlen bolyongás $1 + 1$ dimenzióban
 - Bolyongások magasabb dimenzióban

- 2 A Dirac-egyenlet pozitívítás-tartása
 - **Az egyenlet**
 - Pozitívítás-tartás és Bochner tétele
 - Az eredmény és a bizonyítás vázolata

- 3 Konklúzió

A Dirac-egyenlet

- A valós együttthatójú, dimenziótlán Dirac-egyenlet:

$$\sum_{\mu=0}^d \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi = \psi,$$

ahol $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_S$ és minden egyes γ^{μ} $S \times S$ -es hermitikus mátrix

- Definiáljuk $p(t) = e^{-\alpha t} \gamma^0 \psi(t)$ -t, ennek időfejlődése

$$\partial_t p = -\alpha p + e_0 p - \sum_{\mu=1}^d e_{\mu} \partial_{\mu} p,$$

ahol $\{e_{\mu}, e_{\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1}_S$

- Azt az esetet vizsgáljuk, amikor minden e_{μ} valós, szimmetrikus.

A Dirac-egyenlet

- A valós együttthatójú, dimenziótlan Dirac-egyenlet:

$$\sum_{\mu=0}^d \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \psi,$$

ahol $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_S$ és minden egyes γ^μ $S \times S$ -es hermitikus mátrix

- Definiáljuk $p(t) = e^{-\alpha t} \gamma^0 \psi(t)$ -t, ennek időfejlődése

$$\partial_t p = -\alpha p + e_0 p - \sum_{\mu=1}^d e_\mu \partial_\mu p,$$

ahol $\{e_\mu, e_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1}_S$

- Azt az esetet vizsgáljuk, amikor minden e_μ valós, szimmetrikus.

A Dirac-egyenlet

- A valós együttthatójú, dimenziótlan Dirac-egyenlet:

$$\sum_{\mu=0}^d \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \psi,$$

ahol $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_S$ és minden egyes γ^μ $S \times S$ -es hermitikus mátrix

- Definiáljuk $p(t) = e^{-\alpha t} \gamma^0 \psi(t)$ -t, ennek időfejlődése

$$\partial_t p = -\alpha p + e_0 p - \sum_{\mu=1}^d e_\mu \partial_\mu p,$$

ahol $\{e_\mu, e_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1}_S$

- Azt az esetet vizsgáljuk, amikor minden e_μ valós, szimmetrikus.

Outline

- 1 Bevezetés
 - Pályaintegrálok és szimuláció
 - A sakktábla modell
 - Perzisztens véletlen bolyongás $1 + 1$ dimenzióban
 - Bolyongások magasabb dimenzióban
- 2 A Dirac-egyenlet pozitívítás-tartása
 - Az egyenlet
 - **Pozitívítás-tartás és Bochner tétele**
 - Az eredmény és a bizonyítás vázlatja
- 3 Konklúzió

Pozitívítás-tartás

Definíció

Azt mondjuk, hogy a

$$\partial_t p = -\alpha p + e_0 p - \sum_{\mu=1}^d e_{\mu} \partial_{\mu} p,$$

megtartja a pozitívítást, ha

$$\sum_{q=1}^S \int_{\mathbb{R}^d} p_q(\mathbf{x}, t) d^d \mathbf{x} = 1 \quad 0 \leq p(\mathbf{x}, t)$$

fennáll minden $0 < t$ időpillanatra, azzal a feltétellel, hogy $t = 0$ esetén is fennálltak.

Hogyan bizonyítsuk?

A $p(t)$ Fourier-transzformáltja egyszerű időfejlődéssel bír:

$$\partial_t \Phi[p(t)](\mathbf{k}) = -\alpha \Phi[p(t)](\mathbf{k}) + e_0 \Phi[p(t)](\mathbf{k}) - i \sum_{\mu=1}^d k_\mu e_\mu \Phi[p(t)](\mathbf{k})$$

Azonban $\Phi[p(t)]$ számolásakor elvesztettük a nemnegativitás egyszerű ellenőrizhetőségét.

Amire szükségünk van, az a nemnegatív függvények Fourier-transzformáltjainak belső jellemzése.

Létezik ilyen?

A válasz - szerencsére - igen: Bochner tétele.

Hogyan bizonyítsuk?

A $p(t)$ Fourier-transzformáltja egyszerű időfejlődéssel bír:

$$\partial_t \Phi[p(t)](\mathbf{k}) = -\alpha \Phi[p(t)](\mathbf{k}) + e_0 \Phi[p(t)](\mathbf{k}) - i \sum_{\mu=1}^d k_\mu e_\mu \Phi[p(t)](\mathbf{k})$$

Azonban $\Phi[p(t)]$ számolásakor elvesztettük a nemnegativitás egyszerű ellenőrizhetőségét.

Amire szükségünk van, az a nemnegatív függvények Fourier-transzformáltjainak belső jellemzése.

Létezik ilyen?

A válasz - szerencsére - igen: Bochner tétele.

Hogyan bizonyítsuk?

A $p(t)$ Fourier-transzformáltja egyszerű időfejlődéssel bír:

$$\partial_t \Phi[p(t)](\mathbf{k}) = -\alpha \Phi[p(t)](\mathbf{k}) + e_0 \Phi[p(t)](\mathbf{k}) - i \sum_{\mu=1}^d k_\mu e_\mu \Phi[p(t)](\mathbf{k})$$

Azonban $\Phi[p(t)]$ számolásakor elvesztettük a nemnegativitás egyszerű ellenőrizhetőségét.

Amire szükségünk van, az a nemnegatív függvények Fourier-transzformáltjainak belső jellemzése.

Létezik ilyen?

A válasz - szerencsére - igen: Bochner tétele.

Hogyan bizonyítsuk?

A $p(t)$ Fourier-transzformáltja egyszerű időfejlődéssel bír:

$$\partial_t \Phi[p(t)](\mathbf{k}) = -\alpha \Phi[p(t)](\mathbf{k}) + e_0 \Phi[p(t)](\mathbf{k}) - i \sum_{\mu=1}^d k_\mu e_\mu \Phi[p(t)](\mathbf{k})$$

Azonban $\Phi[p(t)]$ számolásakor elvesztettük a nemnegativitás egyszerű ellenőrizhetőségét.

Amire szükségünk van, az a nemnegatív függvények Fourier-transzformáltjainak belső jellemzése.

Létezik ilyen?

A válasz - szerencsére - **igen**: Bochner tétele.

Bochner tétele

Definíció

A $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pozitív definit, ha minden véges $\Lambda = \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\} \subset \mathbb{R}^d$ halmaz esetén az $N \times N$ -es $F^{(\Lambda)}$ mátrix, melyet $F_{ab}^{(\Lambda)} := \Phi(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b)$ elemei definiálnak, pozitív definit.

Bochner tétele

A $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csakis akkor karakterisztikus függvénye egy \mathbb{R}^d valószínűségi mértéknek, ha

- 1 Φ folytonos,
- 2 Φ pozitív definit,
- 3 $\Phi(\mathbf{0}) = 1$.

Bochner tétele

Definíció

A $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pozitív definit, ha minden véges $\Lambda = \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\} \subset \mathbb{R}^d$ halmaz esetén az $N \times N$ -es $F^{(\Lambda)}$ mátrix, melyet $F_{ab}^{(\Lambda)} := \Phi(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b)$ elemei definiálnak, pozitív definit.

Bochner tétele

A $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csakis akkor karakterisztikus függvénye egy \mathbb{R}^d valószínűségi mértéknek, ha

- 1 Φ folytonos,
- 2 Φ pozitív definit,
- 3 $\Phi(\mathbf{0}) = 1$.

Bochner tétele

Példa

A diffúziós egyenlet

$$\partial_t p = \Delta p$$

pozitívítástartó.

A karakterisztikus függvény időfejlődését leíró egyenlet

$$\partial_t \Phi[p(t)](k) = -k^2 \Phi[p(t)]$$

egyszerűen megoldható:

$$\Phi[p(t)](k) = e^{-k^2 t} \Phi[p(0)]$$

Bochner tétele

Példa

A diffúziós egyenlet

$$\partial_t p = \Delta p$$

pozitívítástartó.

A karakterisztikus függvény időfejlődését leíró egyenlet

$$\partial_t \Phi[p(t)](\mathbf{k}) = -\mathbf{k}^2 \Phi[p(t)]$$

egyszerűen megoldható:

$$\Phi[p(t)](\mathbf{k}) = e^{-\mathbf{k}^2 t} \Phi[p(0)]$$

Bochner tétele

$\Phi[p(t)]$ folytonossága és a normalizáltság azonnal következik a

$$\Phi[p(t)](\mathbf{k}) = e^{-k^2 t} \Phi[p(0)]$$

megoldásból, ha a kezdeti feltétel is rendelkezik ezen tulajdonságokkal.

Legyen $\Lambda = \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\}$ és $F^{(\Lambda)}$ az ennek megfelelő (hermitikus) $N \times N$ -es mátrix. Ennek időfejlődése:

$$F_{ab}^{(\Lambda)}(t) = e^{-(k_a - k_b)^2 t} F_{ab}^{(\Lambda)}(0).$$

Meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges $0 \leq \zeta \in \mathbb{C}^N$ esetén:

$$0 \leq (\zeta, F^{(\Lambda)}(t)\zeta)$$

Bochner tétele

$\Phi[p(t)]$ folytonossága és a normalizáltság azonnal következik a

$$\Phi[p(t)](\mathbf{k}) = e^{-k^2 t} \Phi[p(0)]$$

megoldásból, ha a kezdeti feltétel is rendelkezik ezen tulajdonságokkal.

Legyen $\Lambda = \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\}$ és $F^{(\Lambda)}$ az ennek megfelelő (hermitikus) $N \times N$ -es mátrix. Ennek időfejlődése:

$$F_{ab}^{(\Lambda)}(t) = e^{-(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b)^2 t} F_{ab}^{(\Lambda)}(0).$$

Meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges $0 \leq \zeta \in \mathbb{C}^N$ esetén:

$$0 \leq (\zeta, F^{(\Lambda)}(t)\zeta)$$

Bochner tétele

$\Phi[p(t)]$ folytonossága és a normalizáltság azonnal következik a

$$\Phi[p(t)](\mathbf{k}) = e^{-k^2 t} \Phi[p(0)]$$

megoldásból, ha a kezdeti feltétel is rendelkezik ezen tulajdonságokkal.

Legyen $\Lambda = \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\}$ és $F^{(\Lambda)}$ az ennek megfelelő (hermitikus) $N \times N$ -es mátrix. Ennek időfejlődése:

$$F_{ab}^{(\Lambda)}(t) = e^{-(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b)^2 t} F_{ab}^{(\Lambda)}(0).$$

Meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges $0 \leq \zeta \in \mathbb{C}^N$ esetén:

$$0 \leq (\zeta, F^{(\Lambda)}(t)\zeta)$$

Bochner tétele

Ami könnyen megmutatható a
Hubbard–Stratonovich-transzformáció alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
 (\zeta, F^{(\Lambda)}(t)\zeta) &= \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \bar{\zeta}_a \zeta_b e^{-(k_a - k_b)^2 t} F_{ab}^{(\Lambda)}(0) \\
 &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \overline{(\zeta_a e^{ik_a x})} (\zeta_b e^{ik_b x}) F_{ab}^{(\Lambda)}(0) e^{-\frac{x^2}{4t}} d^d x \\
 &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} (\xi(x), F^{(\Lambda)}(0)\xi(x)) e^{-\frac{x^2}{4t}} d^d x > 0
 \end{aligned}$$

Bochner tétele

Ami könnyen megmutatható a
Hubbard–Stratonovich-transzformáció alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
 (\zeta, F^{(\Lambda)}(t)\zeta) &= \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \bar{\zeta}_a \zeta_b e^{-(k_a - k_b)^2 t} F_{ab}^{(\Lambda)}(0) \\
 &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \overline{(\zeta_a e^{ik_a x})} (\zeta_b e^{ik_b x}) F_{ab}^{(\Lambda)}(0) e^{-\frac{x^2}{4t}} d^d x \\
 &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} (\xi(x), F^{(\Lambda)}(0)\xi(x)) e^{-\frac{x^2}{4t}} d^d x > 0
 \end{aligned}$$

Bochner tétele

Ami könnyen megmutatható a
Hubbard–Stratonovich-transzformáció alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
 (\zeta, F^{(\Lambda)}(t)\zeta) &= \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \bar{\zeta}_a \zeta_b e^{-(k_a - k_b)^2 t} F_{ab}^{(\Lambda)}(0) \\
 &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \overline{(\zeta_a e^{ik_a x})} (\zeta_b e^{ik_b x}) F_{ab}^{(\Lambda)}(0) e^{-\frac{x^2}{4t}} d^d x \\
 &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} (\xi(x), F^{(\Lambda)}(0)\xi(x)) e^{-\frac{x^2}{4t}} d^d x > 0
 \end{aligned}$$

Bochner tétele

Ami könnyen megmutatható a
Hubbard–Stratonovich-transzformáció alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
 (\zeta, F^{(\Lambda)}(t)\zeta) &= \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \bar{\zeta}_a \zeta_b e^{-(k_a - k_b)^2 t} F_{ab}^{(\Lambda)}(0) \\
 &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \overline{(\zeta_a e^{ik_a \mathbf{x}})} (\zeta_b e^{ik_b \mathbf{x}}) F_{ab}^{(\Lambda)}(0) e^{-\frac{x^2}{4t}} d^d \mathbf{x} \\
 &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} (\xi(\mathbf{x}), F^{(\Lambda)}(0)\xi(\mathbf{x})) e^{-\frac{x^2}{4t}} d^d \mathbf{x} > 0
 \end{aligned}$$

Bochner tétele

Általában nagyon nehéz megmutatni, hogy egy függvény pozitív definit, de **annak a bizonyítása, hogy nem az, lehet sokkal könnyebb is**

Teszt esetek

- $|\Lambda| = 1$, ekkor $0 < \Phi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0})$
- $|\Lambda| = 2$ és legyen $\Lambda = \{K, K+k, \}$, teszteljük $\mathbf{1}_2 = (1, 1)^T$ -n a pozitívítást:

$$0 < \varphi(\mathbf{0}) + \varphi(k)$$

Kiderül, hogy a fenti két teszt részletes vizsgálata elég az eredmény bizonyításához.

Bochner tétele

Általában nagyon nehéz megmutatni, hogy egy függvény pozitív definit, de annak a bizonyítása, hogy nem az, lehet sokkal könnyebb is

Teszt esetek

- $|\Lambda| = 1$, ekkor $0 < \Phi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0})$
- $|\Lambda| = 2$ és legyen $\Lambda = \{K, K+k, \}$, teszteljük $\mathbf{1}_2 = (1, 1)^T$ -n a pozitívítást:

$$0 < \varphi(\mathbf{0}) + \varphi(k)$$

Kiderül, hogy a fenti két teszt részletes vizsgálata elég az eredmény bizonyításához.

Bochner tétele

Általában nagyon nehéz megmutatni, hogy egy függvény pozitív definit, de annak a bizonyítása, hogy nem az, lehet sokkal könnyebb is

Teszt esetek

- $|\Lambda| = 1$, ekkor $0 < \Phi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0})$
- $|\Lambda| = 2$ és legyen $\Lambda = \{K, K+k, \}$, teszteljük $\mathbf{1}_2 = (1, 1)^T$ -n a pozitívítást:

$$0 < \varphi(\mathbf{0}) + \varphi(k)$$

Kiderül, hogy a fenti két teszt részletes vizsgálata elég az eredmény bizonyításához.

Bochner tétele

Általában nagyon nehéz megmutatni, hogy egy függvény pozitív definit, de annak a bizonyítása, hogy nem az, lehet sokkal könnyebb is

Teszt esetek

- $|\Lambda| = 1$, ekkor $0 < \Phi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0})$
- $|\Lambda| = 2$ és legyen $\Lambda = \{\mathbf{K}, \mathbf{K} + \mathbf{k}, \}$, teszteljük $\mathbf{1}_2 = (1, 1)^T$ -n a pozitívítást:

$$0 < \varphi(\mathbf{0}) + \varphi(\mathbf{k})$$

Kiderül, hogy a fenti két teszt részletes vizsgálata elég az eredmény bizonyításához.

Bochner tétele

Általában nagyon nehéz megmutatni, hogy egy függvény pozitív definit, de annak a bizonyítása, hogy nem az, lehet sokkal könnyebb is

Teszt esetek

- $|\Lambda| = 1$, ekkor $0 < \Phi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0})$
- $|\Lambda| = 2$ és legyen $\Lambda = \{\mathbf{K}, \mathbf{K} + \mathbf{k}, \}$, teszteljük $\mathbf{1}_2 = (1, 1)^T$ -n a pozitívítást:

$$0 < \varphi(\mathbf{0}) + \varphi(\mathbf{k})$$

Kiderül, hogy a fenti két teszt részletes vizsgálata elég az eredmény bizonyításához.

Outline

- 1 Bevezetés
 - Pályaintegrálok és szimuláció
 - A sakktábla modell
 - Perzisztens véletlen bolyongás $1 + 1$ dimenzióban
 - Bolyongások magasabb dimenzióban
- 2 A Dirac-egyenlet pozitívítás-tartása
 - Az egyenlet
 - Pozitívítás-tartás és Bochner tétele
 - Az eredmény és a bizonyítás vázlata
- 3 Konklúzió

Eredmény

Tétel

A tömeges, szabad, valós együtthatójú Dirac-egyenlet

$$\partial_t p = -\alpha p + e_0 p - \sum_{\mu=1}^d e_\mu \partial_\mu p,$$

akkor és csakis akkor pozitívitas-tartó, ha

- 1 $d = 1$,
- 2 létezik egy $0 < m$ egész és egy Π permutációs mátrix, hogy

$$\Pi e_0 \Pi^{-1} = \sigma_1^{\oplus m} \quad \Pi e_1 \Pi^{-1} = \sigma_3^{\oplus m},$$

- 3 $\alpha = 1$.

Bizonyítás \Rightarrow irányban

Két eset van, attól függően, hogy e_0 irreducibilis vagy reducibilis.

- Ha e_0 irreducibilis, akkor a

$$\varphi(\mathbf{0}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} p(\mathbf{x}, t) d^d \mathbf{x}$$

időfejlődése és némi lineáris algebra elég arra, hogy bizonyítsuk: $S = 2$, így $d = 1$ tehát $e_0 = \sigma_1$, $e_1 = \pm \sigma_3$ és $\alpha = 1$.

- Ha e_0 reducibilis akkor $\varphi(\mathbf{0}, t)$ időfejlődésének vizsgálata csak azt a konklúziót támogatja, hogy $\Pi e_0 \Pi^{-1} = \sigma_1^{\oplus m}$ valamely $1 < m$ egész és Π permutációs mátrix esetén. Ezt követően a második, $0 < \varphi(\mathbf{0}, t) + \varphi(\mathbf{k}, t)$ feltétel vizsgálata adja meg a teljes eredményt.

Bizonyítás \Rightarrow irányban

Két eset van, attól függően, hogy e_0 irreducibilis vagy reducibilis.

- Ha e_0 irreducibilis, akkor a

$$\varphi(\mathbf{0}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} p(\mathbf{x}, t) d^d \mathbf{x}$$

időfejlődése és némi lineáris algebra elég arra, hogy bizonyítsuk: $S = 2$, így $d = 1$ tehát $e_0 = \sigma_1$, $e_1 = \pm \sigma_3$ és $\alpha = 1$.

- Ha e_0 reducibilis akkor $\varphi(\mathbf{0}, t)$ időfejlődésének vizsgálata csak azt a konklúziót támogatja, hogy $\Pi e_0 \Pi^{-1} = \sigma_1^{\oplus m}$ valamely $1 < m$ egész és Π permutációs mátrix esetén. Ezt követően a második, $0 < \varphi(\mathbf{0}, t) + \varphi(\mathbf{k}, t)$ feltétel vizsgálata adja meg a teljes eredményt.

Bizonyítás \Rightarrow irányban

Két eset van, attól függően, hogy e_0 irreducibilis vagy reducibilis.

- Ha e_0 irreducibilis, akkor a

$$\varphi(\mathbf{0}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} p(\mathbf{x}, t) d^d \mathbf{x}$$

időfejlődése és némi lineáris algebra elég arra, hogy bizonyítsuk: $S = 2$, így $d = 1$ tehát $e_0 = \sigma_1$, $e_1 = \pm \sigma_3$ és $\alpha = 1$.

- Ha e_0 reducibilis akkor $\varphi(\mathbf{0}, t)$ időfejlődésének vizsgálata csak azt a konklúziót támogatja, hogy $\Pi e_0 \Pi^{-1} = \sigma_1^{\oplus m}$ valamely $1 < m$ egész és Π permutációs mátrix esetén. Ezt követően a második, $0 < \varphi(\mathbf{0}, t) + \varphi(\mathbf{k}, t)$ feltétel vizsgálata adja meg a teljes eredményt.

Bizonyítás \Leftarrow irányban

Elég csak az $m = 1$ esetet vizsgálni, az egyenlet alakja ekkor

$$\partial_t p = -p + \sigma_1 p - \sigma_3 \partial_x p$$

aminek formális megoldása

$$p(t) = \exp(t(-\mathbb{1}_2 + \sigma_1) - t\sigma_3 \partial_x) p(0)$$

A technikai részletek mellőzése nélkül: a jobb oldalon lévő kifejezés a Lie-Trotter-Kato szorzatformulával közelíthető:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\exp(tN^{-1}(-\mathbb{1}_2 + \sigma_1)) \exp(-tN^{-1}\sigma_3 \partial_x) \right)^N$$

Ennek a szorzatnak minden tényezője pozitívitas-tartó, így maga az egyenlet is az.

Bizonyítás \Leftarrow irányban

Elég csak az $m = 1$ esetet vizsgálni, az egyenlet alakja ekkor

$$\partial_t p = -p + \sigma_1 p - \sigma_3 \partial_x p$$

aminek formális megoldása

$$p(t) = \exp(t(-\mathbb{1}_2 + \sigma_1) - t\sigma_3 \partial_x) p(0)$$

A technikai részletek mellőzése nélkül: a jobb oldalon lévő kifejezés a Lie-Trotter-Kato szorzatformulával közelíthető:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\exp(tN^{-1}(-\mathbb{1}_2 + \sigma_1)) \exp(-tN^{-1}\sigma_3 \partial_x) \right)^N$$

Ennek a szorzatnak minden tényezője pozitívítástartó, így maga az egyenlet is az.

Bizonyítás \Leftarrow irányban

Elég csak az $m = 1$ esetet vizsgálni, az egyenlet alakja ekkor

$$\partial_t p = -p + \sigma_1 p - \sigma_3 \partial_x p$$

aminek formális megoldása

$$p(t) = \exp(t(-\mathbb{1}_2 + \sigma_1) - t\sigma_3 \partial_x) p(0)$$

A technikai részletek mellőzése nélkül: a jobb oldalon lévő kifejezés a Lie-Trotter-Kato szorzatformulával közelíthető:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\exp(tN^{-1}(-\mathbb{1}_2 + \sigma_1)) \exp(-tN^{-1}\sigma_3 \partial_x) \right)^N$$

Ennek a szorzatnak minden tényezője pozitivitástartó, így maga az egyenlet is az.

Bizonyítás \Leftarrow irányban

Elég csak az $m = 1$ esetet vizsgálni, az egyenlet alakja ekkor

$$\partial_t p = -p + \sigma_1 p - \sigma_3 \partial_x p$$

aminek formális megoldása

$$p(t) = \exp(t(-\mathbb{1}_2 + \sigma_1) - t\sigma_3 \partial_x) p(0)$$

A technikai részletek mellőzése nélkül: a jobb oldalon lévő kifejezés a Lie-Trotter-Kato szorzatformulával közelíthető:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\exp(tN^{-1}(-\mathbb{1}_2 + \sigma_1)) \exp(-tN^{-1}\sigma_3 \partial_x) \right)^N$$

Ennek a szorzatnak minden tényezője pozitívítástartó, így maga az egyenlet is az.

Utoljára de nem utolsó sorban: motiváció

Érdekes és fontos tény, hogy $C\ell_{d+1,0}(\mathbb{R})$ reprezentációiban a minden hermitikus generátor egyben unitér is.

Nézzük újra a komplex együtthatójú Dirac-egyenletet. A spinor dimenziója S .

$$\partial_t \psi = \frac{mc^2}{i\hbar} e_0 \psi - c \sum_{\mu=1}^d e_\mu \partial_\mu \psi$$

Legyenek U_μ unitér mátrixok, melyek e_μ -t átviszik $\sigma_3^{\oplus S/2}$ -ba, azaz $e_\mu = U_\mu \sigma_3^{\oplus S/2} U_\mu^*$.

Utoljára de nem utolsó sorban: motiváció

A Lie-Trotter-Kato szorzatformula szerint

$$\psi(t + \Delta t) \approx U_0 e^{-i \frac{mc^2 \Delta t}{\hbar} e_0} U_0^* U_1 e^{-c \Delta t \sigma_3 \partial_1} U_1^* \dots U_d e^{-c \Delta t \sigma_3 \partial_d} U_d^* \psi(t).$$

A szorzat minden tényezője unitér,

továbbá egy kvantumbolyongás időfejlődését írja le, melynek érmetera S dimenziós:

- az operátorok U_μ és $\exp(-i \frac{mc^2 \Delta t}{\hbar} e_0)$ az $U(S)$ elemei és csak az érmeteren hatnak
- az $\exp(-c \Delta t \sigma_3 \partial_\mu)$ operátorok spin-függő eltolást írnak le.

A szimuláció egy új koncepciója: *unitér szimuláció*.

Utoljára de nem utolsó sorban: motiváció

Lamata, Lucas, et al. *Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion*. PRL **98** 253005 (2007)

Massive Dirac equation in the Dirac representation

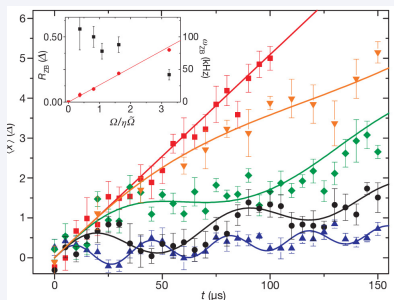
$$i\hbar\partial_t\psi = -i\hbar c\sigma_1\partial_x\psi + mc^2\sigma_z\psi$$

- Egyetlen ion bezárása egy lineáris Paul csapdában
- Két belső állapotát rezonáns laser impulzussal csatolják össze: $\hbar\Omega \leftrightarrow mc^2$
- Vörös és kék elhangolt oldalsáv (Jaynes-Cummings) kölcsönhatással a TM kontrollált eltolását valósítják meg $2\eta\Delta_x\tilde{\Omega}_x \leftrightarrow c$, $\Delta_x = \sqrt{\hbar/2Mv_x}$

Utoljára de nem utolsó sorban: motiváció

Gerritsma, R., Kirchmair, G., Zähringer, F., Solano, E., Blatt, R. and Roos, C.F., 2010. *Quantum simulation of the Dirac equation*. Nature, **463**, pp. 68-71.

- Csapdázott Ca^+ ion $|S_{1/2}, m_J = 1/2\rangle$ és $|D_{5/2}, m_J = 3/2\rangle$ belső állapotokkal,
- kezdőállapot: közel zérus lendület és $|S_{1/2}, m_J = 1/2\rangle$.



Konklúzió

- 1 A Dirac egyenlet közvetlenül nem szimulálható $\{1, \dots, S\} \times \mathbb{R}^d$ értékű sztochasztikus folyamattal
- 2 Hasonló eredmény parabolikus rendszerekre már létezik
- 3 Kvantum szimulátorok ellenben képesek a Dirac-egyenlet megoldásait számolni
- 4 A Dirac-egyenlet nem az egyetlen példa, ahol az unitér szimuláció jobban teljesít: 09.16-i poszt az arXiv-on (1609.04408) azt állítja, hogy vannak olyan sztochasztikus folyamatok, melyeket szimuláló unitér folyamat memóriaigénye a pontosság növekedésével szaturálódik.

Konklúzió

- 1 A Dirac egyenlet közvetlenül nem szimulálható $\{1, \dots, S\} \times \mathbb{R}^d$ értékű sztochasztikus folyamattal
- 2 Hasonló eredmény parabolikus rendszerekre már létezik
- 3 Kvantum szimulátorok ellenben képesek a Dirac-egyenlet megoldásait számolni
- 4 A Dirac-egyenlet nem az egyetlen példa, ahol az unitér szimuláció jobban teljesít: 09.16-i poszt az arXiv-on (1609.04408) azt állítja, hogy vannak olyan sztochasztikus folyamatok, melyeket szimuláló unitér folyamat memóriaigénye a pontosság növekedésével szaturálódik.

Konklúzió

- 1 A Dirac egyenlet közvetlenül nem szimulálható $\{1, \dots, S\} \times \mathbb{R}^d$ értékű sztochasztikus folyamattal
- 2 Hasonló eredmény parabolikus rendszerekre már létezik
- 3 Kvantum szimulátorok ellenben képesek a Dirac-egyenlet megoldásait számolni
- 4 A Dirac-egyenlet nem az egyetlen példa, ahol az unitér szimuláció jobban teljesít: 09.16-i poszt az arXiv-on (1609.04408) azt állítja, hogy vannak olyan sztochasztikus folyamatok, melyeket szimuláló unitér folyamat memóriaigénye a pontosság növekedésével szaturálódik.

Konklúzió

- 1 A Dirac egyenlet közvetlenül nem szimulálható $\{1, \dots, S\} \times \mathbb{R}^d$ értékű sztochasztikus folyamattal
- 2 Hasonló eredmény parabolikus rendszerekre már létezik
- 3 Kvantum szimulátorok ellenben képesek a Dirac-egyenlet megoldásait számolni
- 4 A Dirac-egyenlet nem az egyetlen példa, ahol az unitér szimuláció jobban teljesít: 09.16-i poszt az arXiv-on (1609.04408) azt állítja, hogy vannak olyan sztochasztikus folyamatok, melyeket szimuláló unitér folyamat memóriaigénye a pontosság növekedésével **szaturálódik**.

Köszönöm a figyelmet!