Snapshot attraktorok és nemergodicitás a klímaváltozás dinamikájában

Drótos Gábor
PhD témavezető: Tél Tamás
Munkatársak: Bódai T., Haszpra T., Herein M., Márfy J.

ELTE TTK Elméleti Fizikai Tanszék,
MTA–ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport

Statisztikus Fizikai Szeminárium
2016. március 30.

Vázlat

Bevezetés: motiváció, alacsonydimenziós modell

Snapshot attraktorok, a konvergencia ideje

A nemergodicitás elemzése

Eredmények egy sokdimenziós „általános körzési modellben” (GCM-ben)

Vázlat

Motiváció

- Klíma $\approx$ az időjárás statisztikája
- Mi a megfelelő valószínűségi eloszlás?
  $\rightarrow$ A snapshot attraktor természetes eloszlása (sokaságkép)
- Valódi földi klíma: csak 1 megfigyelt realizáció
  $\rightarrow$ Időátlagok egyedi trajektóriák mentén? (pl. 30 évre? IPCC 2013)
- Belső változékonyság vs. gerjesztésre adott válasz

Modell: Lorenz '84 [Tellus **36A**, 98]

$$\dot{x} = -y^2 - z^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}F$$
$$\dot{y} = -y + xy - 4xz + 1$$
$$\dot{z} = -z + xz + 4xy$$

x: a nyugatias szelek sebessége

y, z: ciklonális módusok

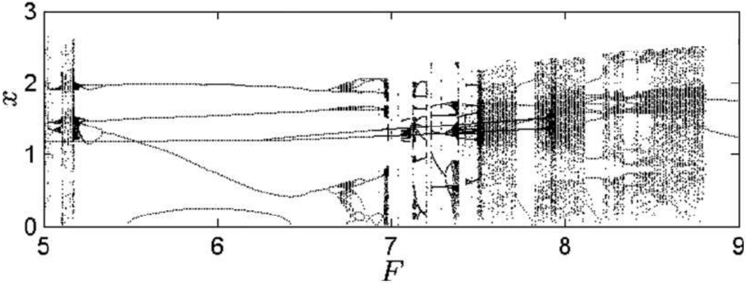
F: hőmérsékleti kontraszt paramétere („benne van'' pl. a CO_2-tartalom), konstans

→ Hagyományos attraktor

Modell: Lorenz '84 [Tellus **36A**, 98]

$$\dot{x} = -y^2 - z^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}F$$
$$\dot{y} = -y + xy - 4xz + 1$$
$$\dot{z} = -z + xz + 4xy$$

x: a nyugatias szelek sebessége
y, z: ciklonális módusok
F: hőmérsékleti kontraszt paramétere („benne van" pl. a CO_2-tartalom), konstans



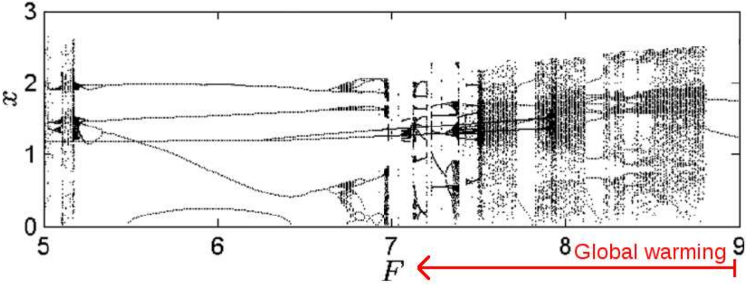
Modell: Lorenz '84 [Tellus **36A**, 98]

$$\dot{x} = -y^2 - z^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}F$$
$$\dot{y} = -y + xy - 4xz + 1$$
$$\dot{z} = -z + xz + 4xy$$

x: a nyugatias szelek sebessége

y, z: ciklonális módusok

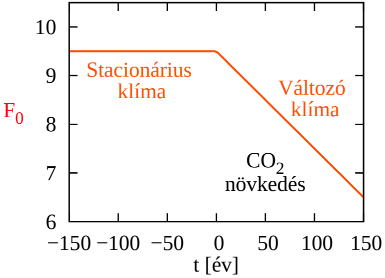
F: hőmérsékleti kontraszt paramétere („benne van" pl. a CO_2-tartalom), konstans



A változó klíma modellje

$$\dot{x} = -y^2 - z^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}F(t)$$
$$\dot{y} = -y + xy - 4xz + 1$$
$$\dot{z} = -z + xz + 4xy$$

$$F(t) = F_0(t) + 2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \qquad T = 1\,\text{year}$$



Szezonalitás [Lorenz, Tellus **42A**, 378 (1990)]
(kiszűrjük egy „stroboszkopikus leképezéssel”: télközépi időpontok)

$$F_0(t) = \begin{cases} 9.5 & \text{for } t \le 0 \\ 9.5 - \dfrac{2t}{100\,T} & \text{for } t > 0 \end{cases}$$

Vázlat

Snapshot attraktor

- A hagyományos attraktor általánosítása nemautonóm rendszerekre

  Romeiras, Grebogi and Ott, Phys. Rev. A **41**, 784 (1990)

  Ghil, Chekroun and Simonnet, Physica D **237**, 2111 (2008) and **240**, 1685 (2011)

- Kezdeti feltételek: véletlenszerűen elosztva egy nagy dobozban az (x, y, z) fázistérben, messze a múltban ($N \approx 10^6$)

- Nyomon követjük az N trajektóriát a t időpillanatig
  $\rightarrow$ snapshot attraktor a t időpillanatban

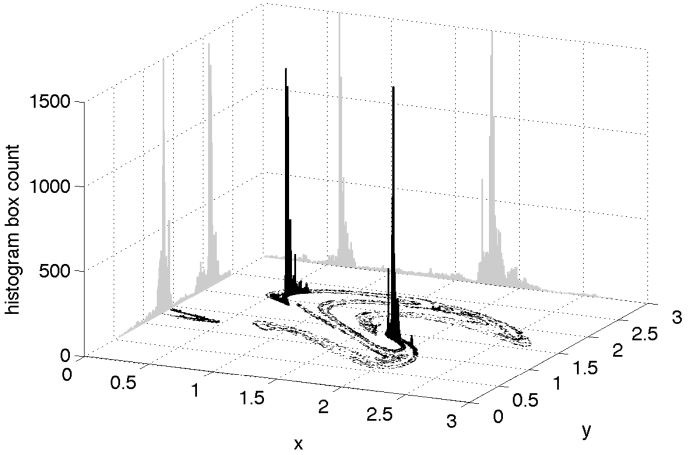
Télközépi snapshot attraktorok, $z = 0$

[videó] Bódai Tamástól

A snapshot attraktor természetes eloszlása

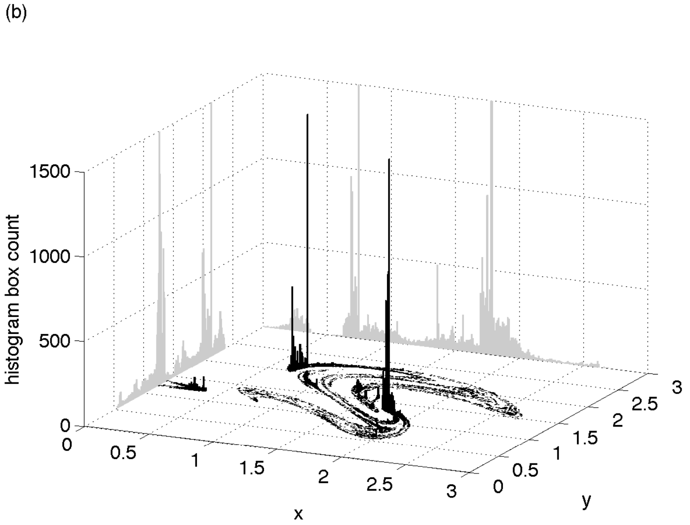
25. év

(a)



A snapshot attraktor természetes eloszlása

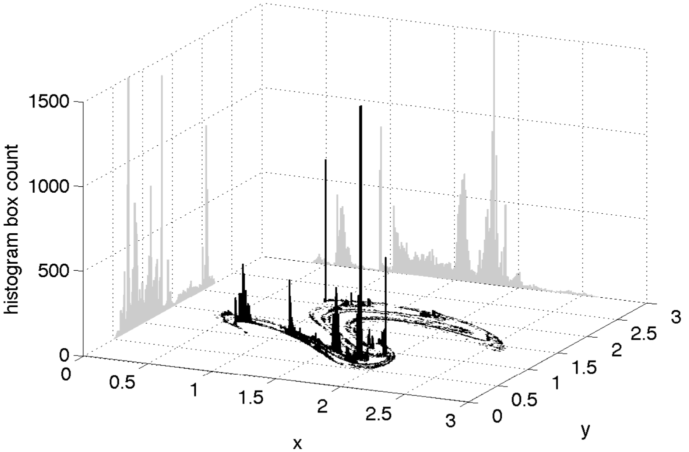
50. év



A snapshot attraktor természetes eloszlása

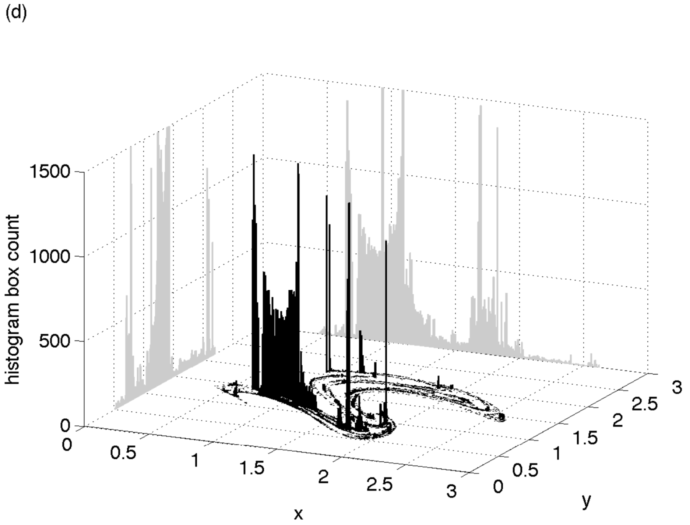
88. év

(c)



A snapshot attraktor természetes eloszlása

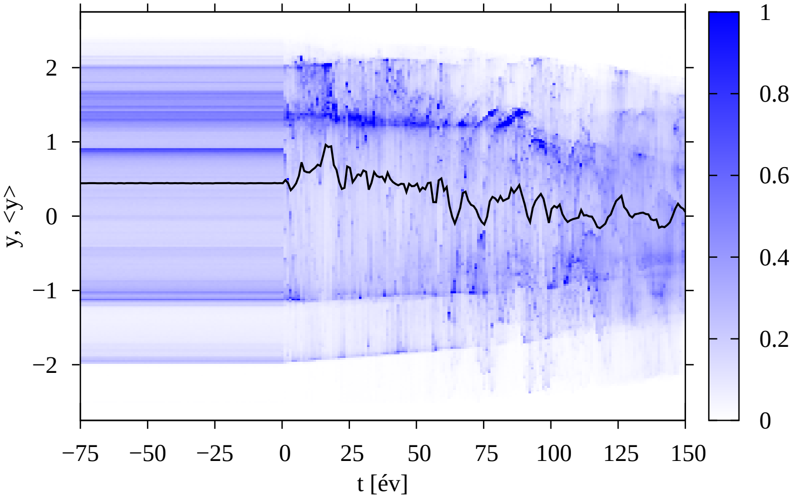
89. év



A snapshot attraktor természetes eloszlása

[videó] Bódai Tamástól

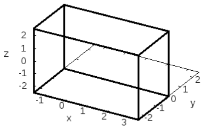
Statisztikák, pl. átlagok időfejlődése

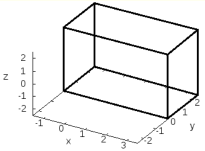


Függetlenség a kezdeti feltételektől

$N = 10^6$

$t_0 = 10$év

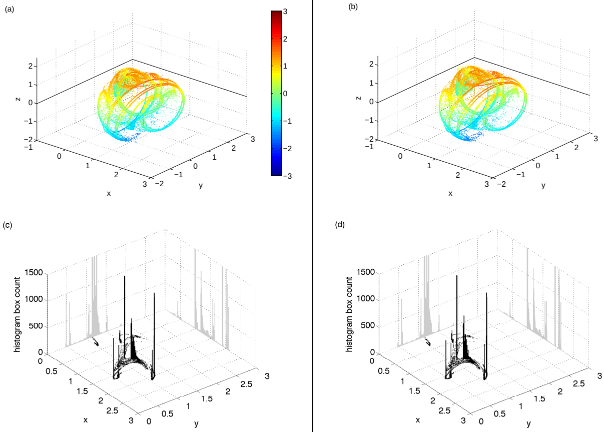




$N = 10^6$

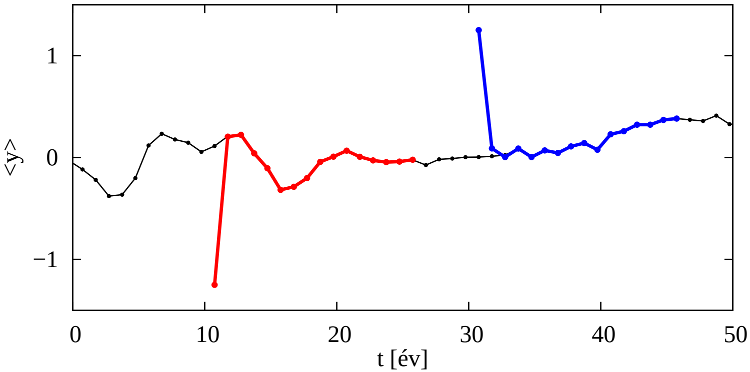
$t_0 = 30$év

$t = 50$év

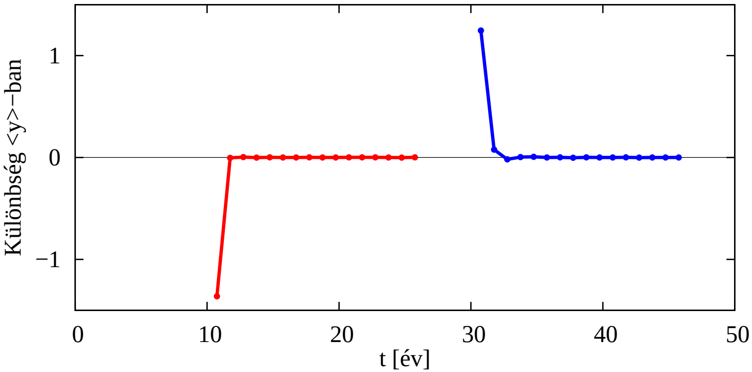


$t = 50$év

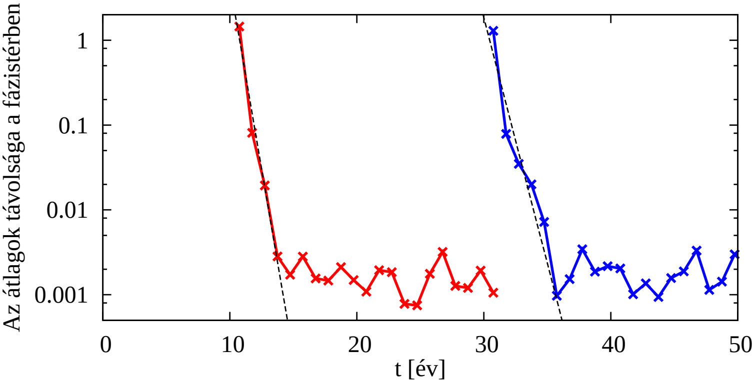
Konvergencia



Konvergencia

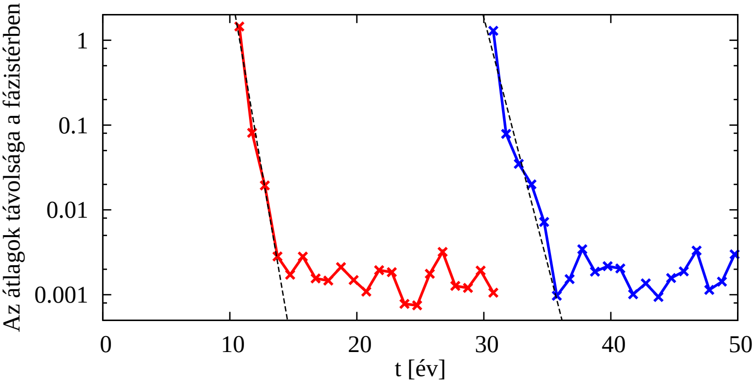


Konvergencia



A konvergencia karakterisztikus ideje: ≈ 0.6 év

Konvergencia



A konvergencia karakterisztikus ideje: ≈ 0.6 év

Drótos, Bódai and Tél, J. Climate **28**, 3275 (2015)

Vázlat

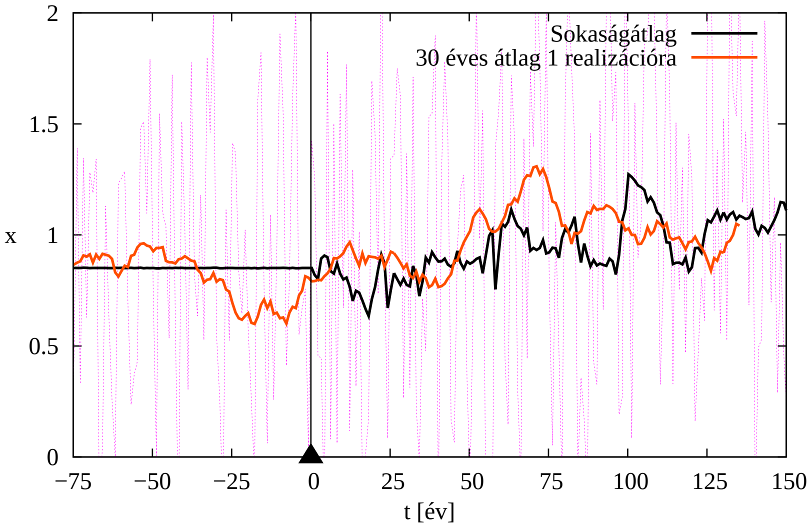
Bevezetés: motiváció, alacsonydimenziós modell

Snapshot attraktorok, a konvergencia ideje

A nemergodicitás elemzése

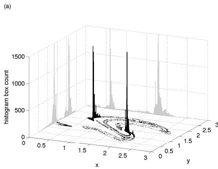
Eredmények egy sokdimenziós „általános körzési modellben” (GCM-ben)

30 éves átlag egyedi realizáció mentén vs. sokaságátlag



Sokaságátlag és egyedi realizáció menti időátlag

- A snapshot attractor természetes mértéke: $\mu(t)$

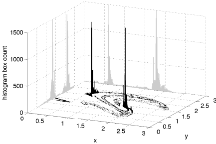


Sokaságátlag és egyedi realizáció menti időátlag

- A snapshot attractor természetes mértéke: $\mu(t)$

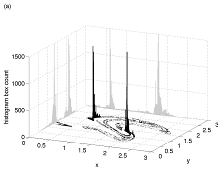
$$\mathcal{A}(\varphi(t)) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu(t)$$

(a)



Sokaságátlag és egyedi realizáció menti időátlag

- A snapshot attractor természetes mértéke: $\mu(t)$



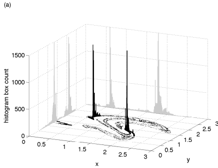
$$\mathcal{A}(\varphi(t)) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu(t)$$

- Egy egyedi realizáció mentén:

$$\mathcal{A}_\tau(\varphi(t)) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \varphi(t') \, \mathrm{d}t'$$

véges, τ hosszúságú időablakon

Sokaságátlag és egyedi realizáció menti időátlag



- A snapshot attractor természetes mértéke: $\mu(t)$

$$\mathcal{A}(\varphi(t)) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu(t)$$

- Egy egyedi realizáció mentén:

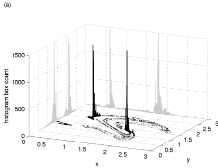
$$\mathcal{A}_\tau(\varphi(t)) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \varphi(t') \, \mathrm{d}t'$$

  véges, τ hosszúságú időablakon

- Az eltérés az ergodicitástól (Birkhoff) egy egyedi realizációra:

$$\delta_\tau(t) = \mathcal{A}_\tau(\varphi(t)) - \mathcal{A}(\varphi(t))$$

Sokaságátlag és egyedi realizáció menti időátlag



- A snapshot attractor természetes mértéke: $\mu(t)$

$$\mathcal{A}(\varphi(t)) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu(t)$$

- Egy egyedi realizáció mentén:

$$\mathcal{A}_\tau(\varphi(t)) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \varphi(t') \, \mathrm{d}t'$$

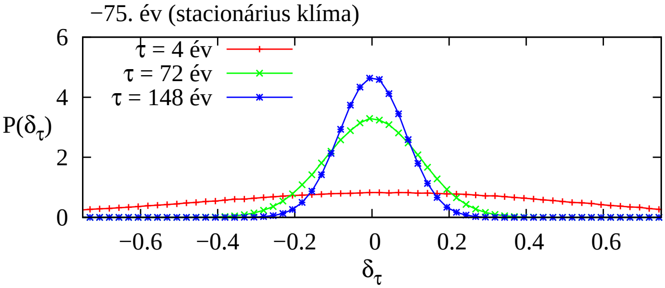
  véges, τ hosszúságú időablakon

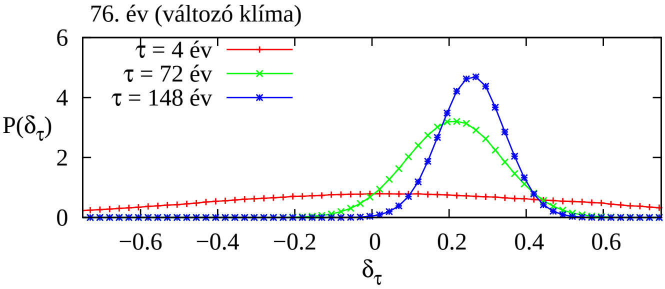
- Az eltérés az ergodicitástól (Birkhoff) egy egyedi realizációra:

$$\delta_\tau(t) = \mathcal{A}_\tau(\varphi(t)) - \mathcal{A}(\varphi(t))$$

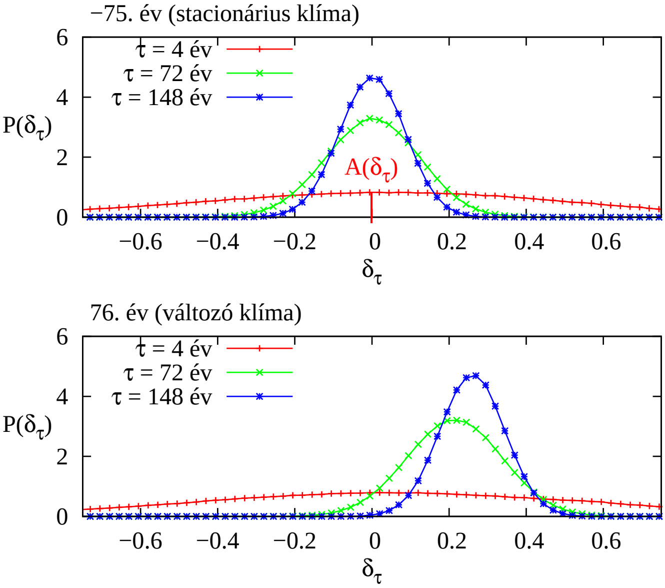
- δ_τ-nak saját valószínűségi eloszlása van

A δ_τ eltérés valószínűségi eloszlása ($\varphi = y$)

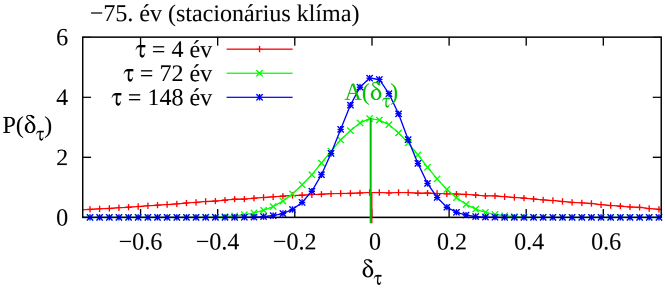


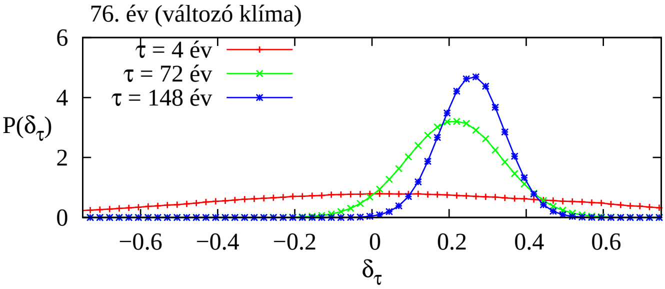


A δ_τ eltérés valószínűségi eloszlása ($\varphi = y$)

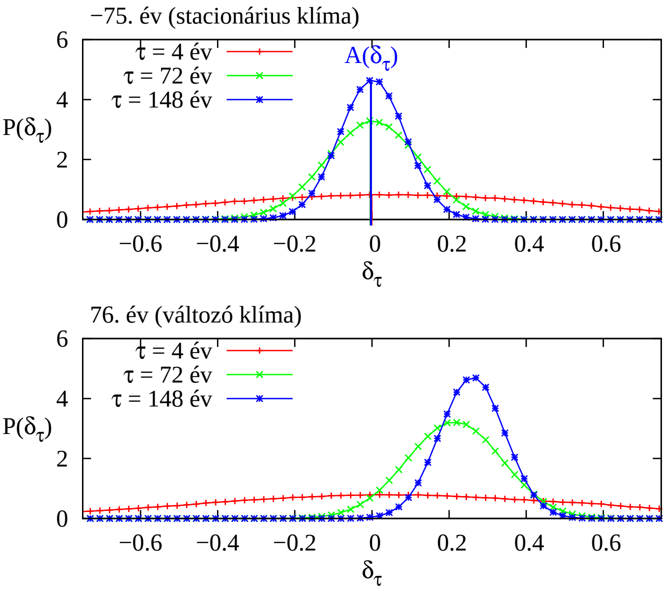


A δ_τ eltérés valószínűségi eloszlása ($\varphi = y$)

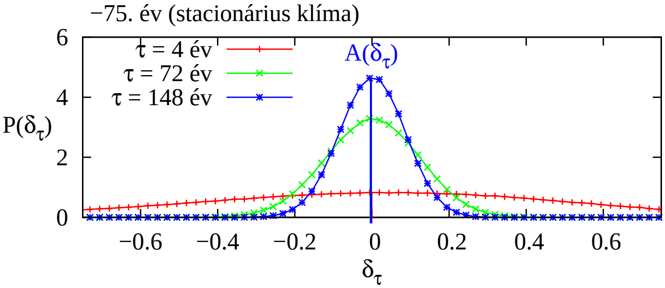


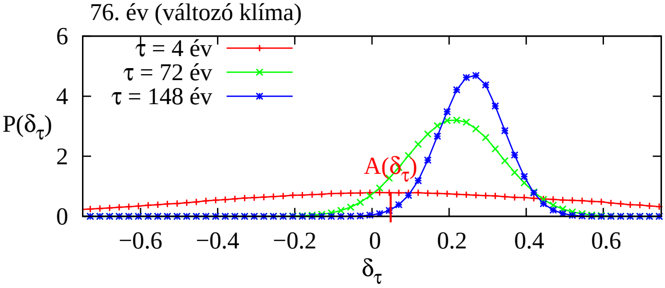


A δ_τ eltérés valószínűségi eloszlása ($\varphi = y$)

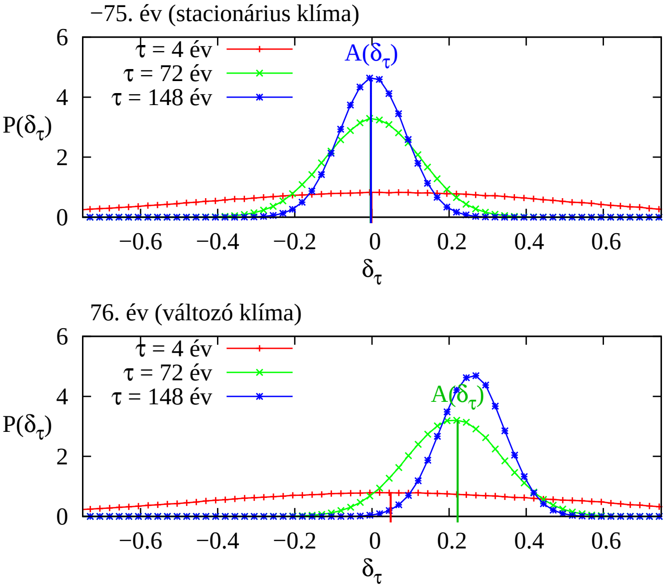


A δ_τ eltérés valószínűségi eloszlása ($\varphi = y$)

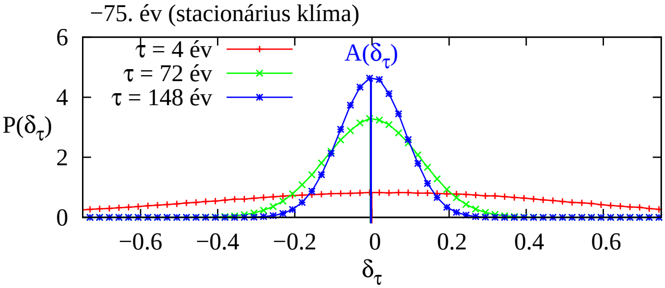


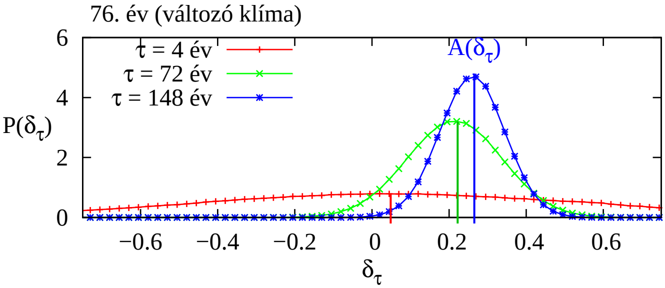


A δ_τ eltérés valószínűségi eloszlása ($\varphi = y$)

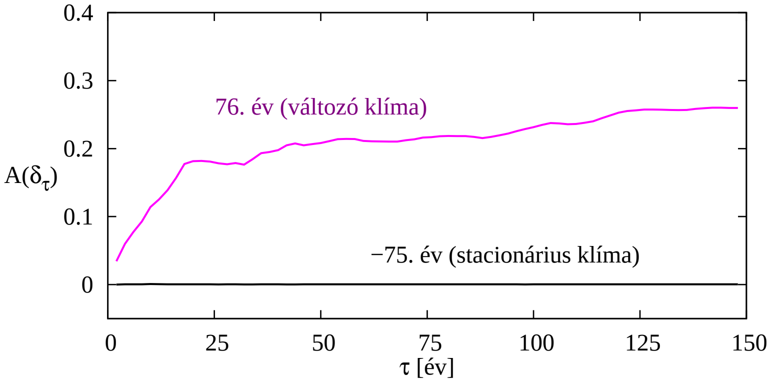


A δ_τ eltérés valószínűségi eloszlása ($\varphi = y$)





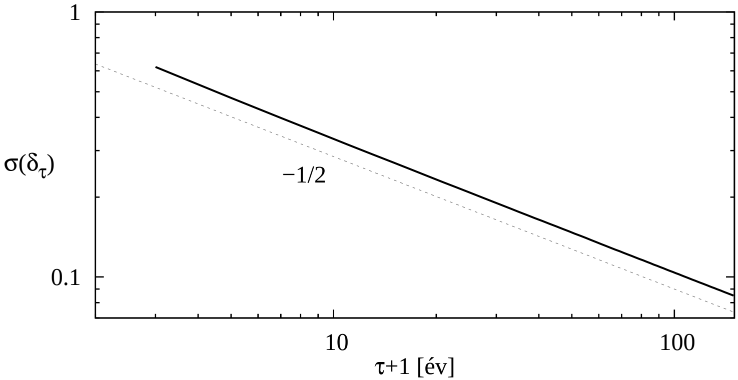
Az $\mathcal{A}(\delta_\tau)$ átlag függése a τ ablakhossztól



$\mathcal{A}(\delta_\tau)$: a nemergodicitás (és a klímaváltozás) indikátora, már véges τ-ra is

A $\sigma(\delta_\tau)$ szórás függése a τ ablakhossztól

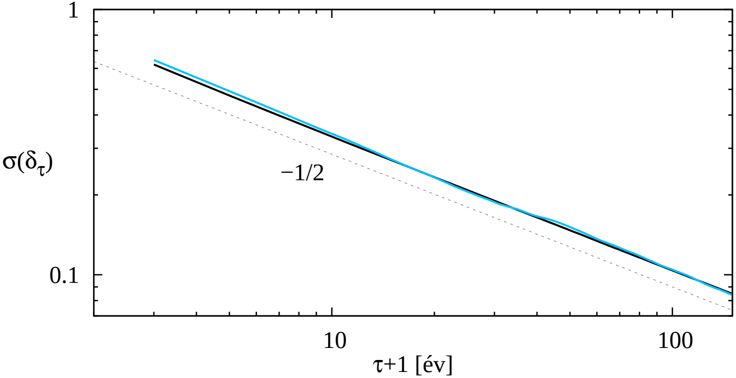
-75. év (stacionárius klíma):



$\sigma(\delta_\tau) \sim 1/\sqrt{\tau}$

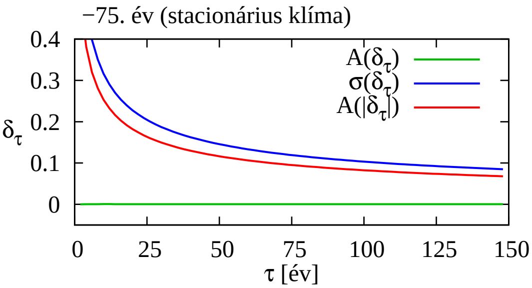
A $\sigma(\delta_\tau)$ szórás függése a τ ablakhossztól

76. év (változó klíma)



Ismét: $\sigma(\delta_\tau) \sim 1/\sqrt{\tau}$

$\mathcal{A}(|\delta_\tau|)$ függése a τ ablakhossztól

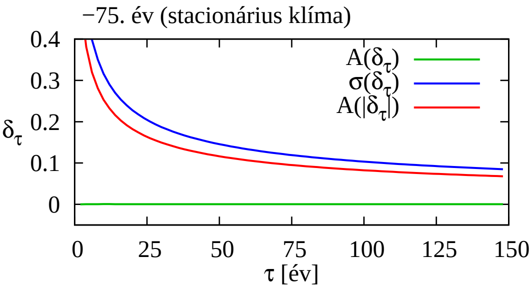


$\mathcal{A}(|\delta_\tau|)$:

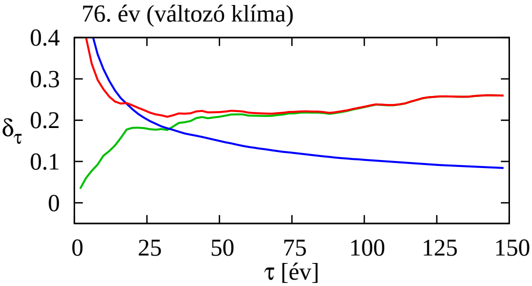
Várható abszolút eltérés, emlékezzünk:

$\delta_\tau = \mathcal{A}_\tau(y) - \mathcal{A}(y)$

$\mathcal{A}(|\delta_\tau|)$ függése a τ ablakhossztól

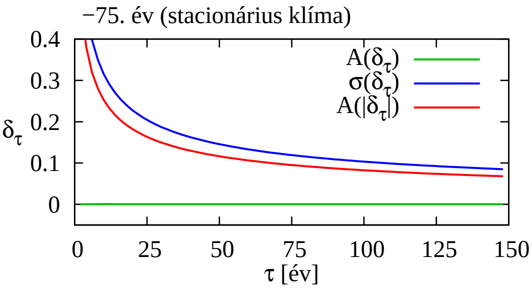


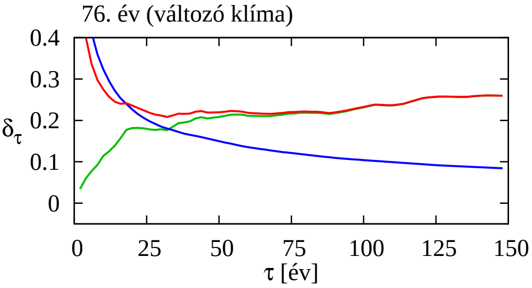
$\mathcal{A}(|\delta_\tau|)$:
Várható abszolút eltérés, emlékezzünk:
$\delta_\tau = \mathcal{A}_\tau(y) - \mathcal{A}(y)$



$\mathcal{A}(|\delta_\tau|) \approx \max\left(\mathcal{A}(\delta_\tau), \sigma(\delta_\tau)\right)$

$\mathcal{A}(|\delta_\tau|)$ függése a τ ablakhossztól





$\mathcal{A}(|\delta_\tau|)$:

Várható abszolút eltérés, emlékezzünk:

$\delta_\tau = \mathcal{A}_\tau(y) - \mathcal{A}(y)$

$$\mathcal{A}(|\delta_\tau|) \approx \max\left(\mathcal{A}(\delta_\tau), \sigma(\delta_\tau)\right)$$

Tradeoff

Drótos, Bódai and Tél, submitted to Phys. Rev. E

Vázlat

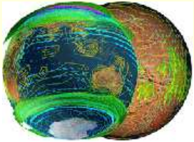
Bevezetés: motiváció, alacsonydimenziós modell

Snapshot attraktorok, a konvergencia ideje

A nemergodicitás elemzése

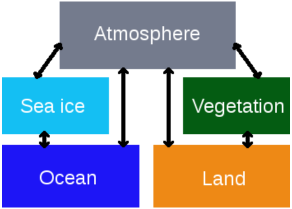
Eredmények egy sokdimenziós „általános körzési modellben" (GCM-ben)

Planet Simulator



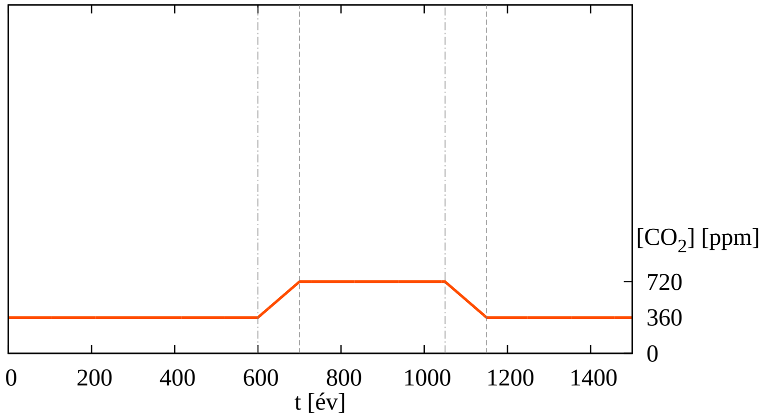
University of Hamburg

- Közepes összetettségű GCM (General Circulation Model)
- Megmaradási törvények (impulzus, tömeg, hő, víz)
- Parametrizációk
- Vízszintes felbontás: néhány 100 km (spektrális reprezentáció)
- 10 légköri réteg
- Óceán: hő- és víztartály, dinamika nélkül
- Változók száma: $\approx 10^5$
- Nyílt forráskódú, ingyen letölthető: `http://edilbert.github.io/PLASIM/`

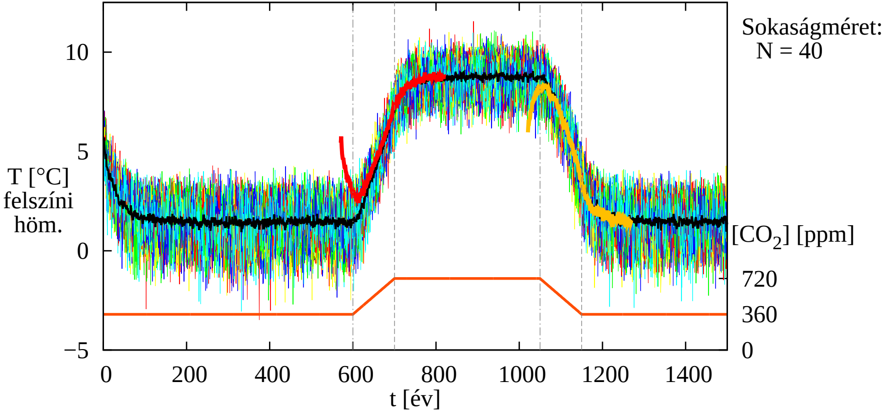


Nem törekszünk realisztikus klímaprojekciókra

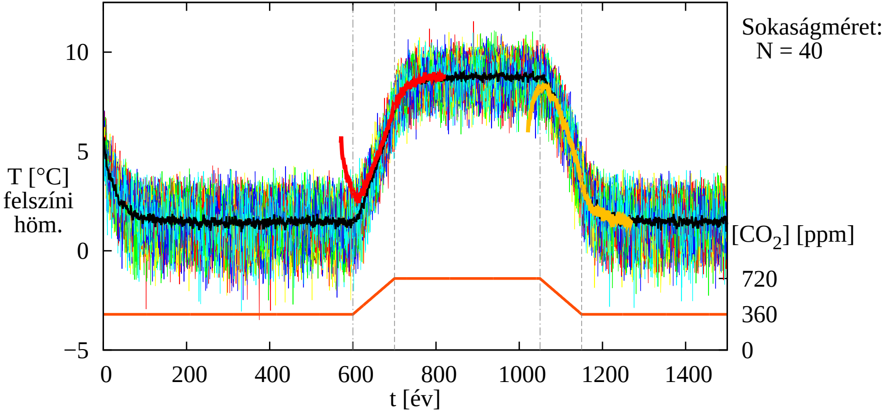
Direkt gerjesztés a CO_2-tartalommal



Válasz egy rácspont hőmérsékletében („Magyarország")

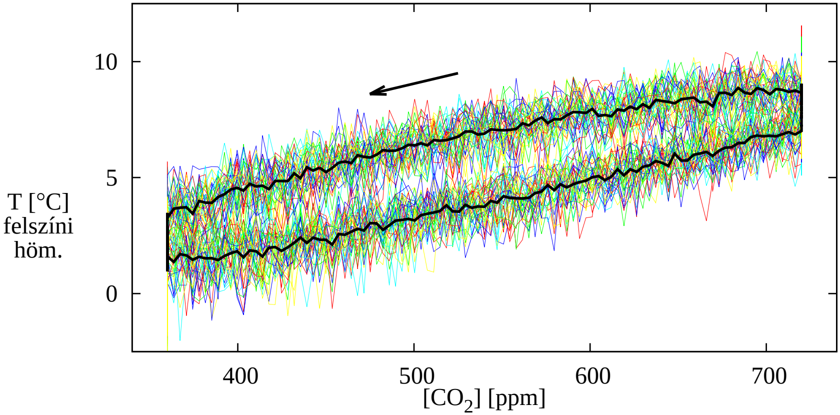


Válasz egy rácspont hőmérsékletében („Magyarország”)



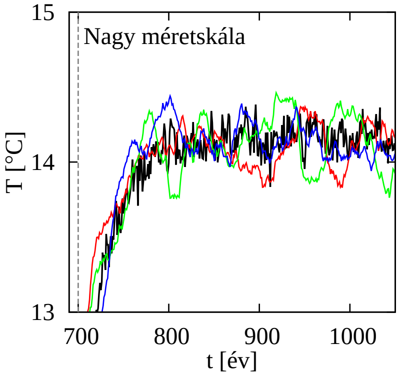
A konvergencia karakterisztikus ideje: ≈ 30 év

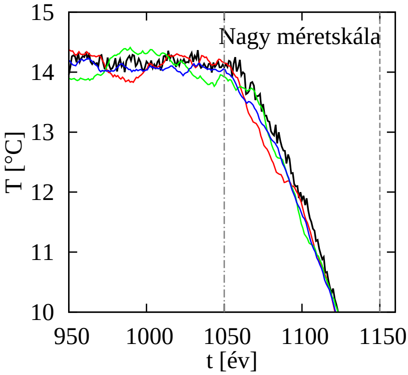
Eltérő reprezentáció: T vs. $[CO_2]$



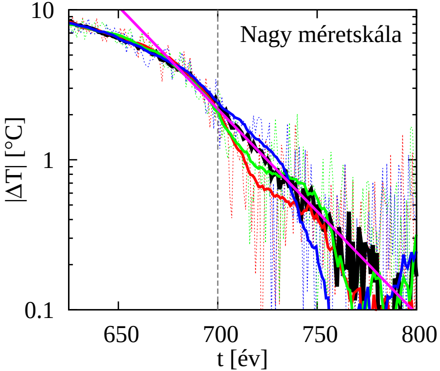
Dinamikai hiszterézis

Egyedi realizáció vs. sokaságátlag nagyobb méretskálán





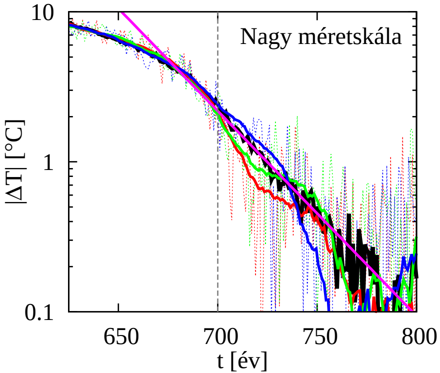
Időátlag vs. sokaságátlag



Illesztett τ:

Sokaságátlagra	31.8
Időátlagokra: átlag	32.6
Időátlagokra: szórás	14.8

Időátlag vs. sokaságátlag



Illesztett τ:

Sokaságátlagra	31.8
Időátlagokra: átlag	32.6
Időátlagokra: szórás	14.8

Herein, Márfy, Drótos and Tél, J. Climate **29**, 259 (2016)

Konklúzió

Snapshot attraktorok a klímadinamikában:

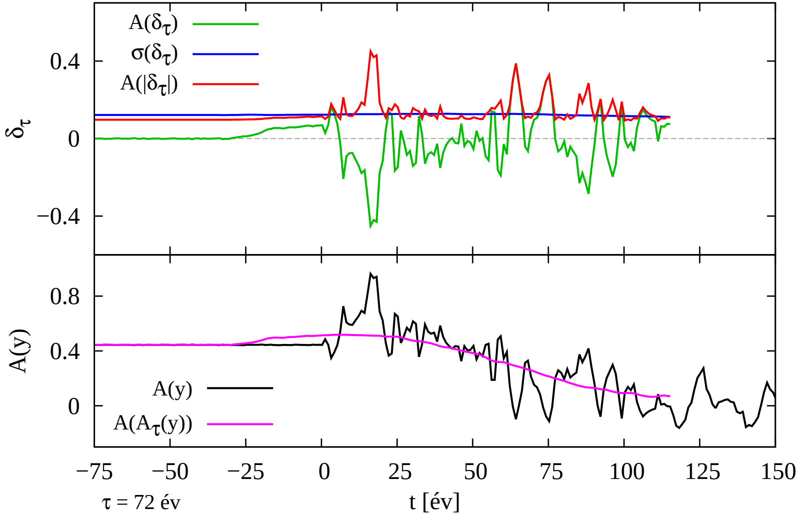
- Fogalmilag fontos és számítási szempontból hasznos
  - A válasz elválasztása a belső változékonyságtól
  - Bármilyen releváns valószínűség ismerete
- Változó klíma $\Leftrightarrow$ nemergodicitás
- Kiszámítható sokdimenziós GCM-ben is

Jövőbeli kutatás, nyitott kérdések:

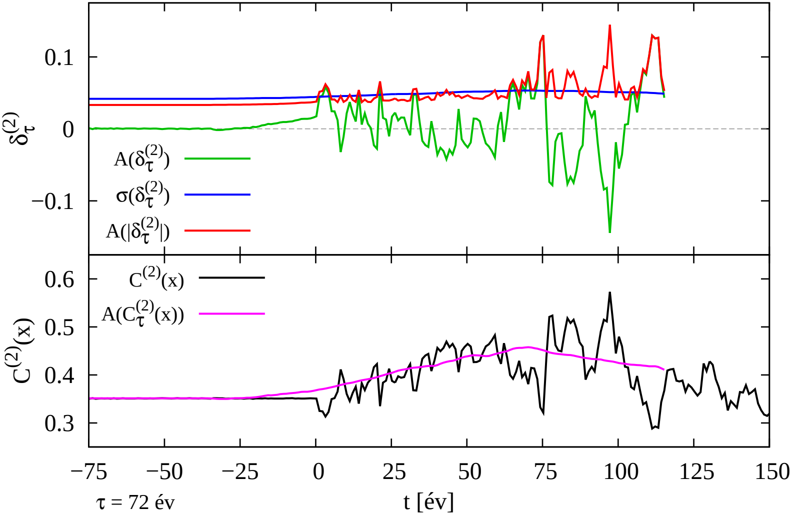
- Időskála-szeparáció
- A zaj szerepe
- Együttlétező attraktorok, átmenetek: egyértelműség?
- Alkalmazás: telekonnekciók

Drótos, Bódai and Tél, J. Climate **28**, 3275 (2015)
Herein, Márfy, Drótos and Tél, J. Climate **29**, 259 (2016)
Drótos, Bódai and Tél, submitted to Phys. Rev. E

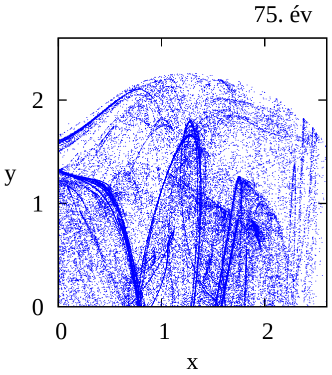
δ_τ eloszlásának az időfüggése

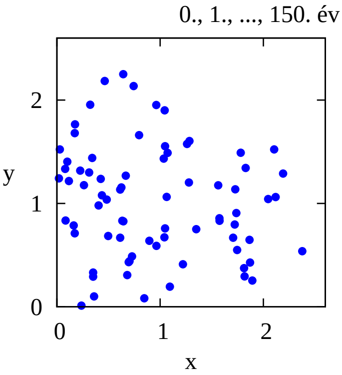


$\delta_\tau^{(2)}$ eloszlásának az időfüggése



Snapshot attraktor vs. 1 egyedi trajektória





Egyedi realizáció vs. sokaságátlag