Csempézés elektromos ellenállásokkal

Széchenyi Gábor , Dávid Gyula
és Cserti József

Anyagfizikai Tanszék,
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék,
Atomfizikai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Budapest

Statisztikus Fizikai Szeminárium
2013. április 10.

Mottó

„A játék a kutatás legjobb módja."

Albert Einstein

165 éves kérdés

Klasszikus probléma: Egy ellenállás-hálozatban két tetszőleges rácspont között mérhető ellenállás kiszámítása.

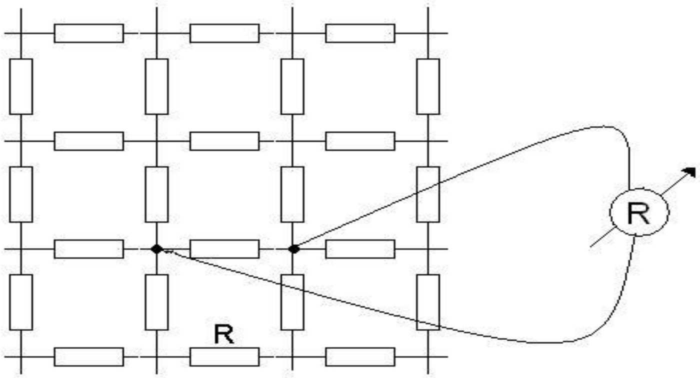
Véges rácsok:

G. Kirchhoff, Ann. Phys. Chem. , 72 (**1847**); 497.-508. o.

Végtelen rácsok:

R. E. Aitchison: Am. J. Phys. 32 556 (**1964**).

Gustav Robert Kirchhoff
(1824-1887)



Irodalom

B. van der Pol and H. Bremmer 1950
Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral
P. G. Doyle and J. L. Snell 1984 *RandomWalks and Electric Networks*

R. E. Aitchison, Am. J. Phys. **32**, 566-566 (1964).
G. Venezian, Am. J. Phys. **62**, 1000-1004 (1994).
D. Atkinson and F. J. van Steenwijk, Am. J. Phys. **67**, 486-492 (1999).
S. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **45**, 574-588 (1973).

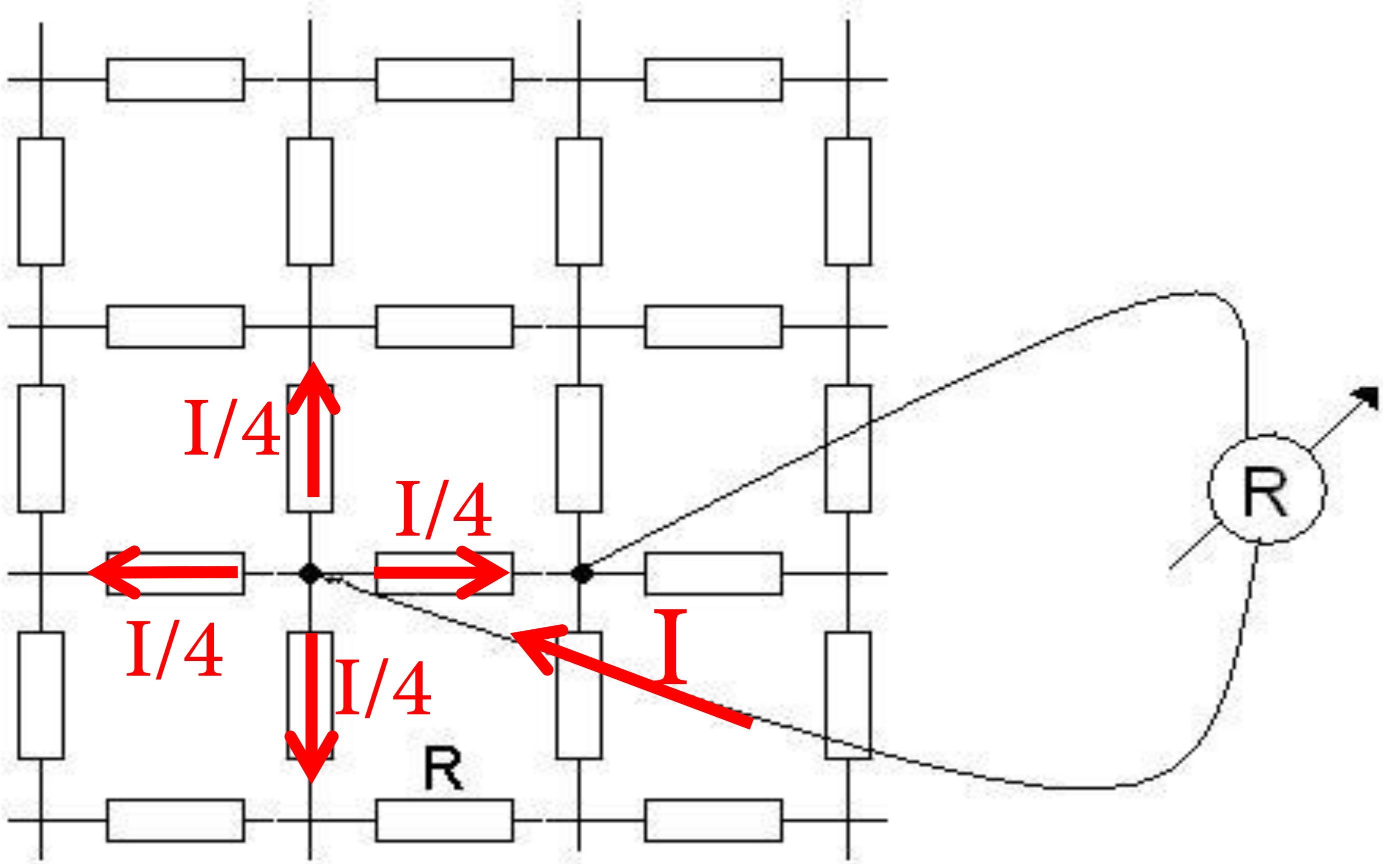
J. Cserti: *Application of the lattice Green's function for calculating the resistance of an infinite network of resistors*,
Am. J. Phys. **68**, 896-906 (2000).

S. Redner: *A Guide to First-Passage Processes*
(New York: Cambridge University Press, 2001).

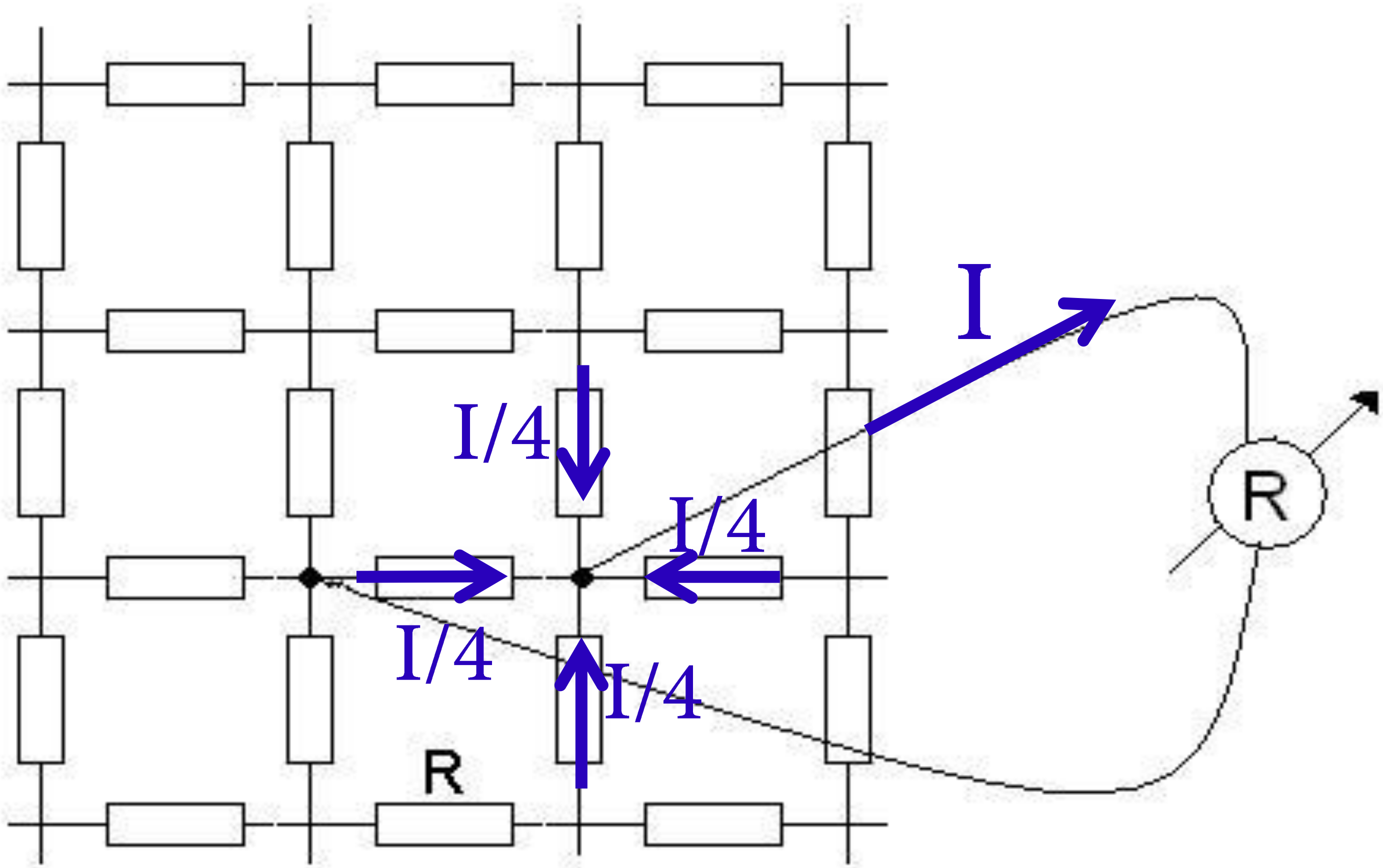
J. Cserti, Gyula Dávid, Attila Piróth:
Perturbation of infinite networks of resistors,
Am. J. Phys. **70**, 153-159, (2002).

F. Y. Wu, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 6653-6673 (2004).
W. J. Tzeng and F. Y. Wu, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 8579-8591 (2006).
J. W. Essam and F. Y. Wu, J. Phys. A: Math. Gen. **42**, 025205 (2009).

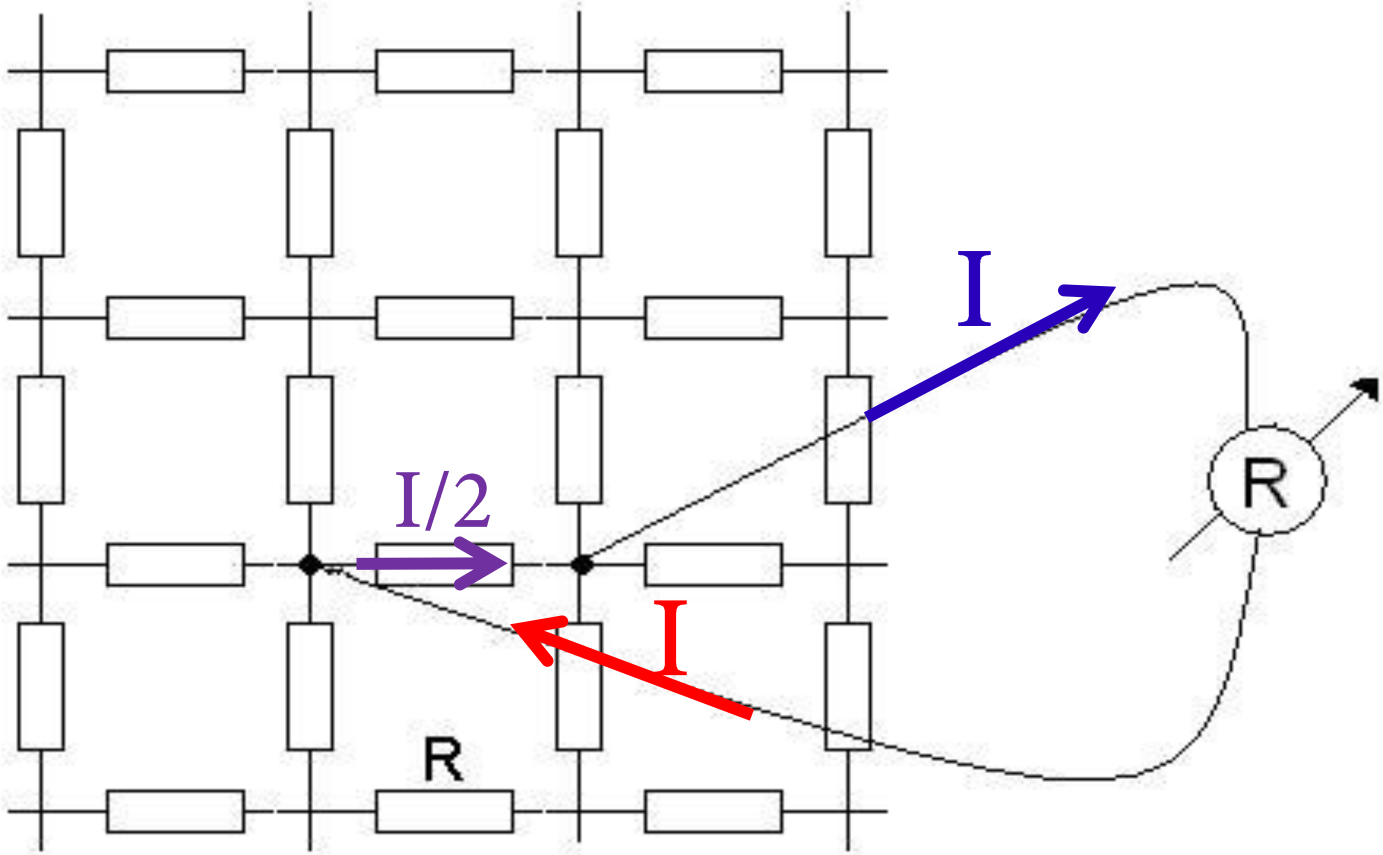
Elektromosságtan gyakorlat példa



Elektromosságtan gyakorlat példa

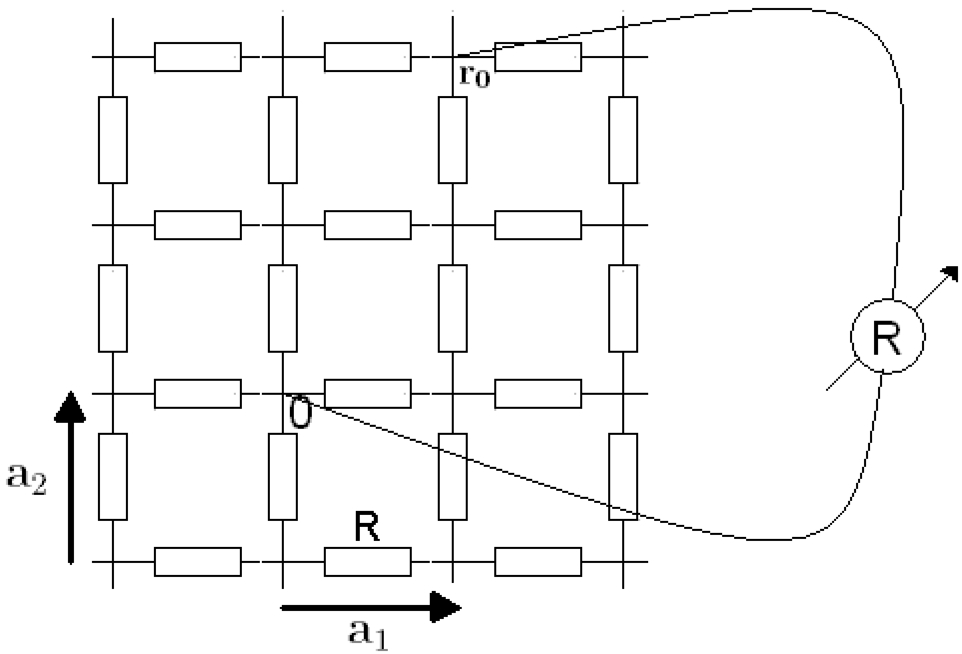


Elektromosságtan gyakorlat példa

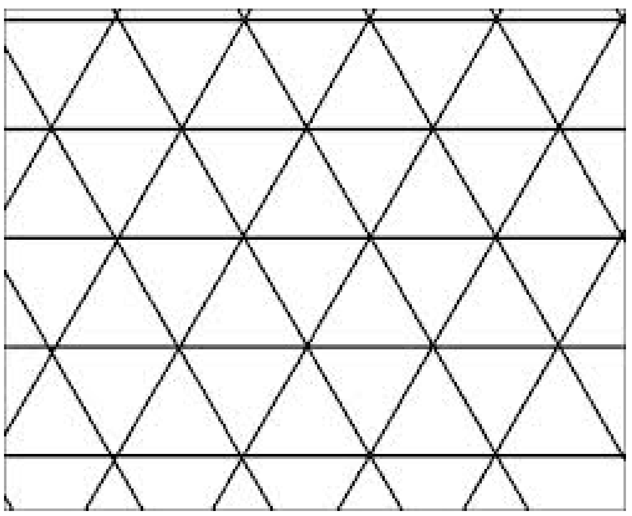


$$V = R_{eredo} I = R\frac{I}{2}; \rightarrow \;\; R_{eredo} = \frac{R}{2}$$

Klasszikus problémák



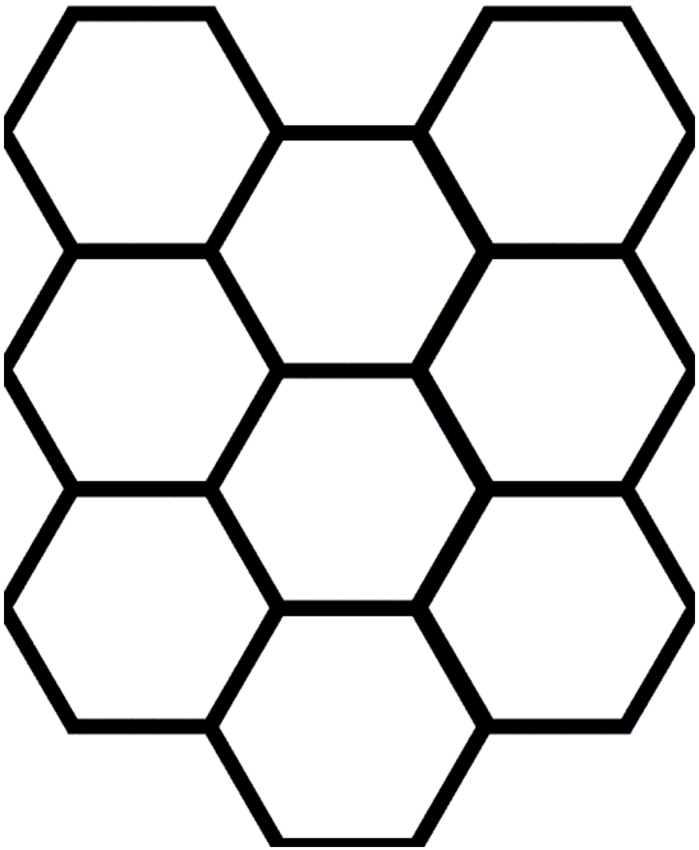
Négyzetrács

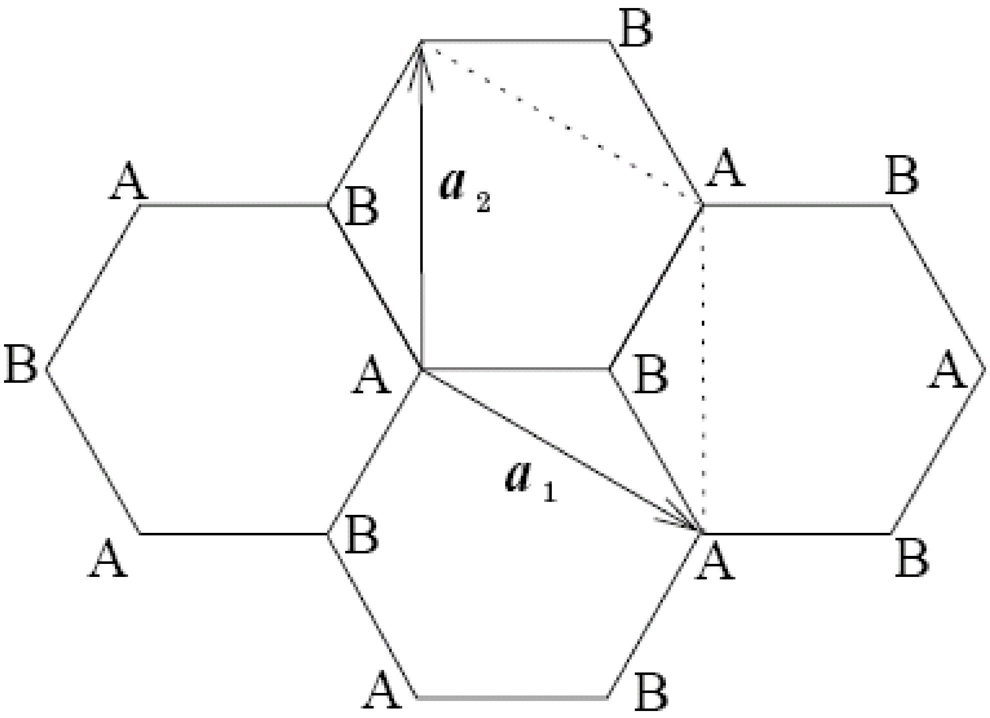


Háromszögrács

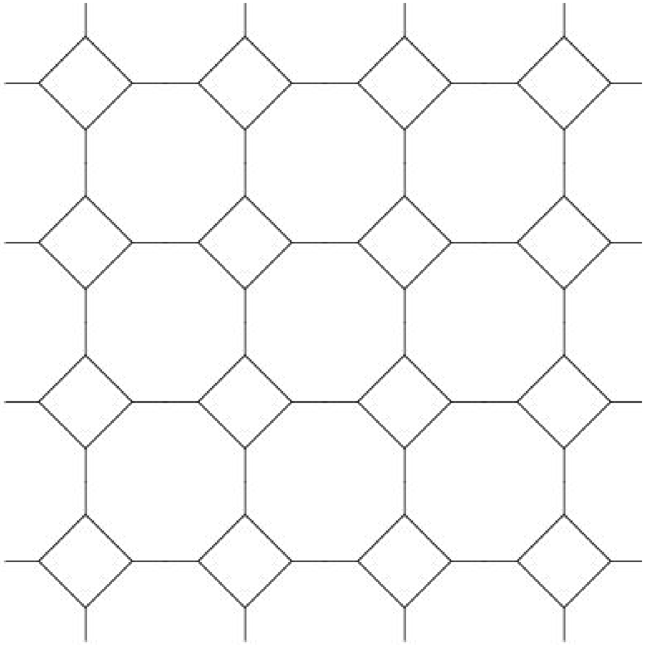
Hatszögrács

Két „bázisatom” egy elemi cellában

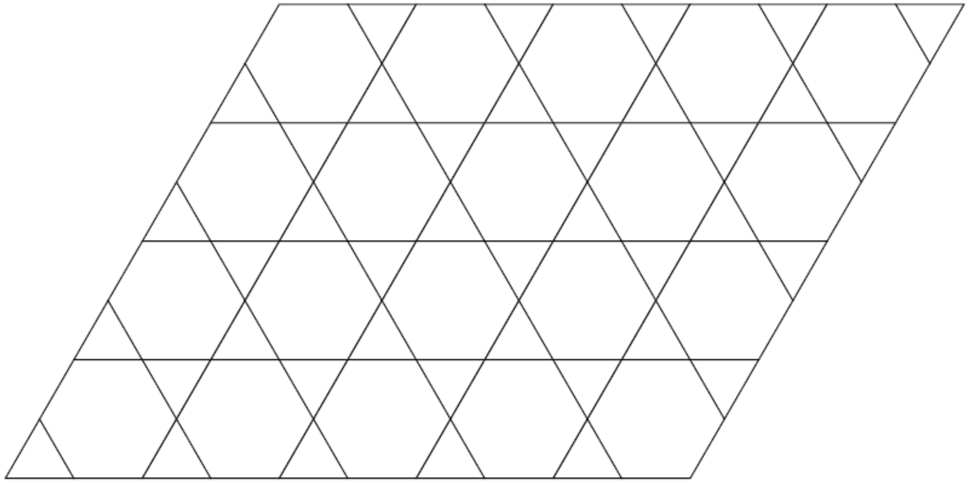




Csempézés elektromos ellenállásokkal I.



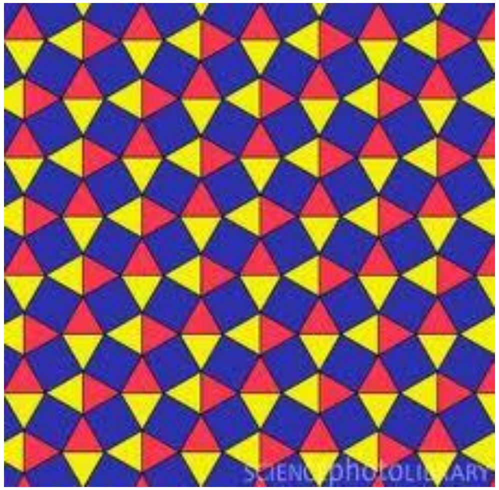
Nyolcszögekből és négyszögekből álló rács

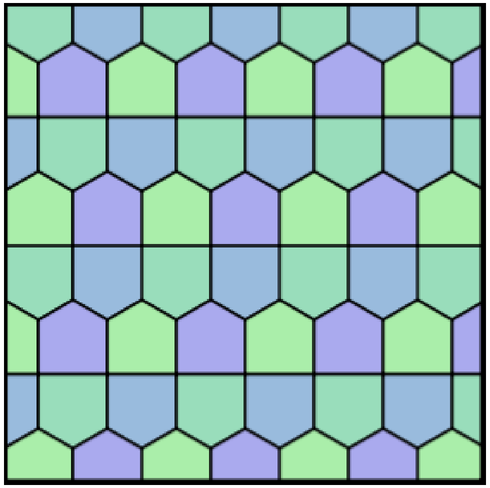


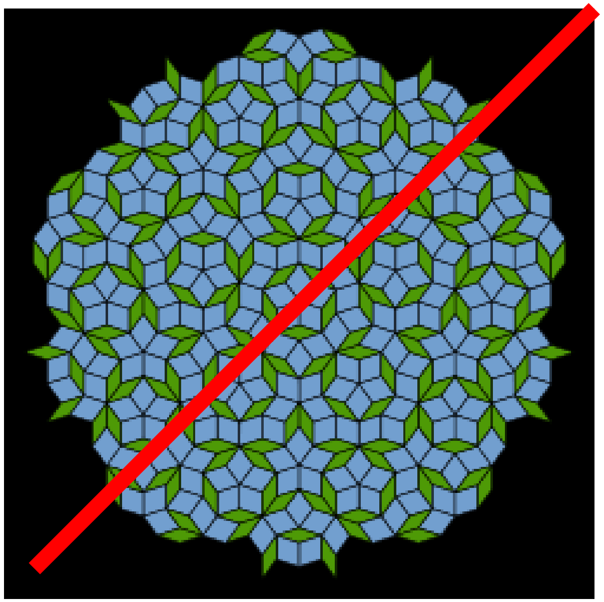
Kagomé-rács

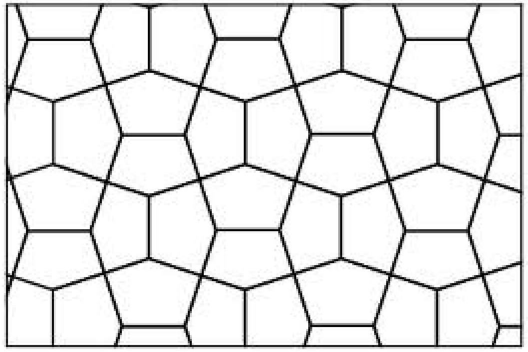
Csempézés elektromos ellenállásokkal II.

A sík (tér) bármilyen PERIODIKUS csempézése

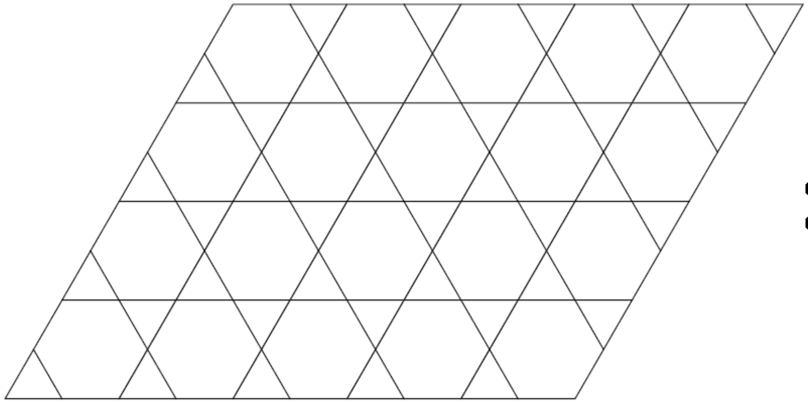




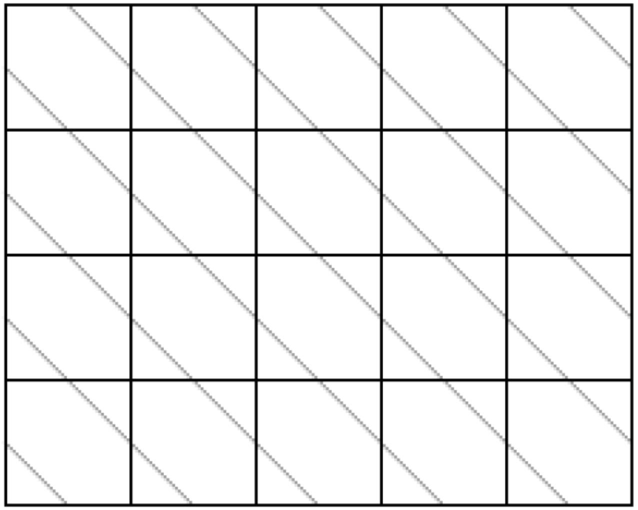




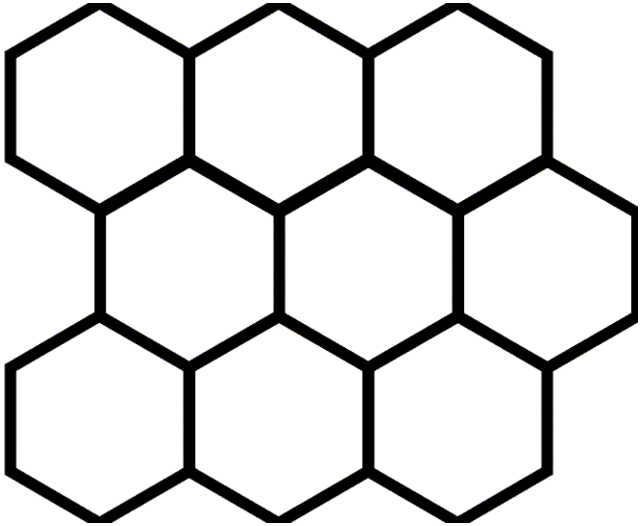
Csempézések ekvivalenciája



$\approx$

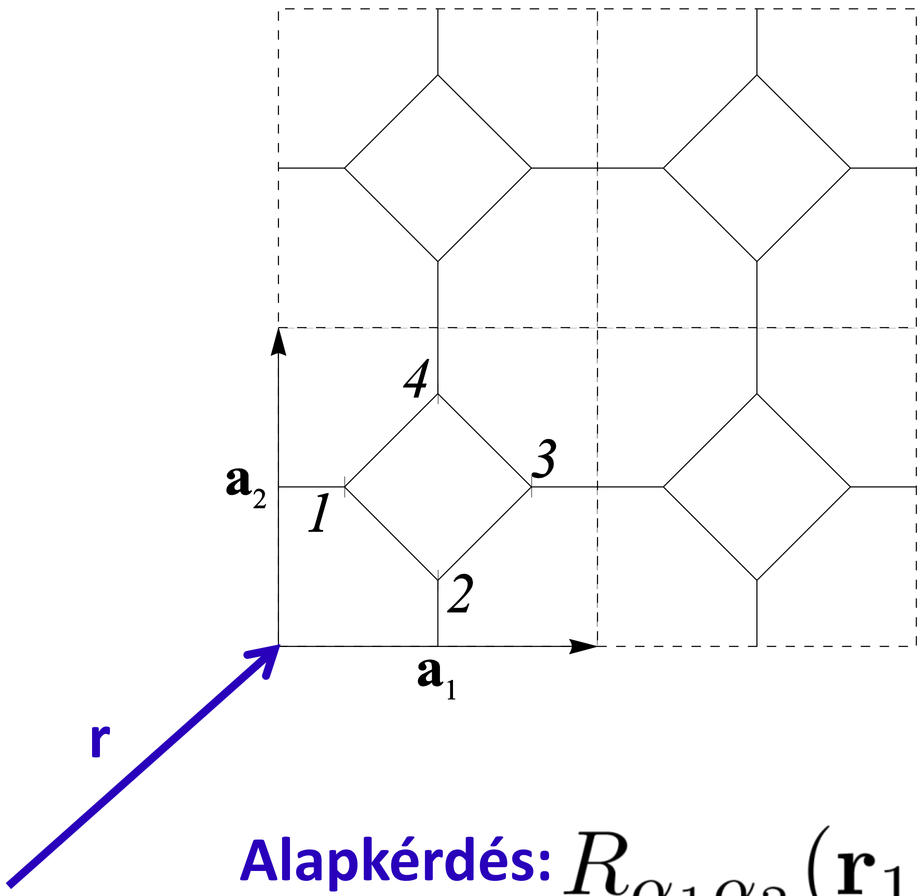


$\approx$



Lássuk a medvét!

Első lépés elemi cella megkeresése!



Az elemi cellán belül
a rácspontok sorszámozása:
$$\alpha = 1, 2, \ldots, p$$
p az elemi cellán belüli
rácspontok száma

A rácspontok jellemzése:
$$\{\mathbf{r}, \alpha\}$$

Alapkérdés: $R_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = R_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$

Az ellenállás $\{\mathbf{r}_1, \alpha_1\}$ és $\{\mathbf{r}_2, \alpha_2\}$ rácspontok között

Kirchoff-törvények

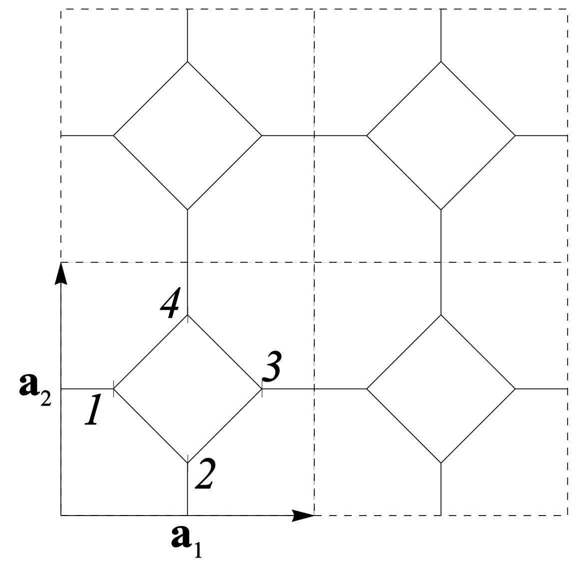
Második lépés Kirchoff-törvények felírása!

$$I_1(\mathbf{r}) = \frac{V_1(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r})}{R} + \frac{V_1(\mathbf{r}) - V_3(\mathbf{r}-\mathbf{a}_1)}{R} + \frac{V_1(\mathbf{r}) - V_4(\mathbf{r})}{R},$$

$$I_2(\mathbf{r}) = \frac{V_2(\mathbf{r}) - V_1(\mathbf{r})}{R} + \frac{V_2(\mathbf{r}) - V_3(\mathbf{r})}{R} + \frac{V_2(\mathbf{r}) - V_4(\mathbf{r}-\mathbf{a}_2)}{R},$$

$$I_3(\mathbf{r}) = \frac{V_3(\mathbf{r}) - V_1(\mathbf{r}+\mathbf{a}_1)}{R} + \frac{V_3(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r})}{R} + \frac{V_3(\mathbf{r}) - V_4(\mathbf{r})}{R},$$

$$I_4(\mathbf{r}) = \frac{V_4(\mathbf{r}) - V_1(\mathbf{r})}{R} + \frac{V_4(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r}+\mathbf{a}_2)}{R} + \frac{V_4(\mathbf{r}) - V_3(\mathbf{r})}{R}.$$



$\{\mathbf{r}, \alpha\}$ pontba befolyó áram

Connectivity mátrix

Harmadik lépés connectivity mátrix felírása!

$$\sum_{\mathbf{r}',\beta} L_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,V_\beta(\mathbf{r}') = -I_\alpha(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}) = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} -3\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}} & \delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} & \delta_{\mathbf{r},\mathbf{a}_1} & \delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} \\ \delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} & -3\delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} & \delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} & \delta_{\mathbf{r},\mathbf{a}_2} \\ \delta_{\mathbf{r},-\mathbf{a}_1} & \delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} & -3\delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} & \delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} \\ \delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} & \delta_{\mathbf{r},-\mathbf{a}_2} & \delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} & -3\delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} \end{bmatrix}$$

Fourier-transzformáció

Negyedik lépés Fourier-transzformáció!

$$\mathbf{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{I}(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{L}(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

Brillouin-zóna vektora:

$$\mathbf{k} = \frac{m_1}{N_1}\mathbf{b}_1 + \frac{m_2}{N_2}\mathbf{b}_2 + \cdots + \frac{m_d}{N_d}\mathbf{b}_d$$

reciprokrács-vektorok

$$\mathbf{L}(\mathbf{k})\,\mathbf{V}(\mathbf{k}) = -\mathbf{I}(\mathbf{k}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}(\mathbf{k}) = \mathbf{G}(\mathbf{k})\,\mathbf{I}(\mathbf{k})$$

Green-függvény: $\mathbf{G}(\mathbf{k}) = -\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{k})$

Potenciál meghatározása

Lépjen be **I** áram az $\{\mathbf{r_1}, \alpha_1\}$ pontban és lépjen ki az $\{\mathbf{r_2}, \alpha_2\}$.

$$I_\nu(\mathbf{r}) = I\left(\delta_{\nu,\alpha_1}\,\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r_1}} - \delta_{\nu,\alpha_2}\,\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r_2}}\right)$$

$$I_\nu(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} I_\nu(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr}} = I\left(\delta_{\nu,\alpha_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr_1}} - \delta_{\nu,\alpha_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr_2}}\right).$$

Potenciál eloszlás meghatározása:

$$V_\mu(\mathbf{k}) = \sum_\nu G_{\mu\nu} I_\nu(\mathbf{k})$$

$$V_\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\mathrm{BZ}} V_\mu(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}} = \frac{I}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\mathrm{BZ}}\left[G_{\mu\alpha_1}(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r_1})} - G_{\mu\alpha_2}(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r_2})}\right].$$

Eredő ellenállás meghatározása:

$$R_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{V_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1) - V_{\alpha_2}(\mathbf{r}_2)}{I}.$$

Eredmény

$$R_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = v_0 \int_{\mathbf{k}\in \mathrm{BZ}} \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \Big[G_{\alpha_1\alpha_1}(\mathbf{k}) + G_{\alpha_2\alpha_2}(\mathbf{k})$$

$$-G_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)} - G_{\alpha_2\alpha_1}(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}\Big].$$

Általában nem lehet analitikusan elvégezni!

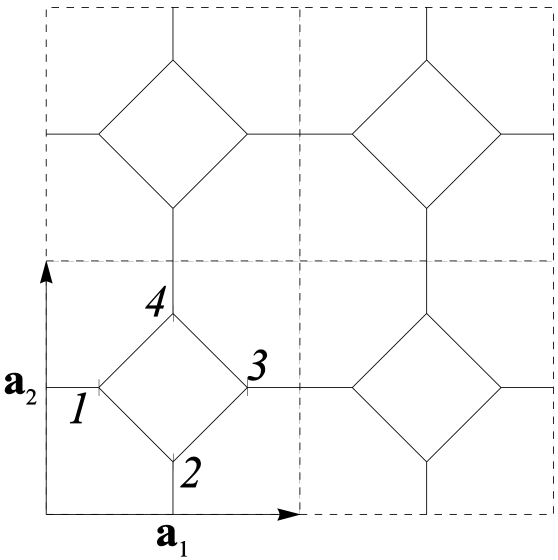
Dimenziótlanítás: $x_1 = \mathbf{k}\mathbf{a}_1, x_2 = \mathbf{k}\mathbf{a}_2, \ldots, x_d = \mathbf{k}\mathbf{a}_d$

$$R_{\alpha_1\alpha_2}(n_1,\ldots,n_d) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x_1}{2\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x_d}{2\pi}\Big[G_{\alpha_1\alpha_1}(x_1,\ldots,x_d) + G_{\alpha_2\alpha_2}(x_1,\ldots,x_d)$$

$$-G_{\alpha_1\alpha_2}(x_1,\ldots,x_d)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n_1x_1+n_2x_2+\cdots n_dx_d)} - G_{\alpha_2\alpha_1}(x_1,\ldots,x_d)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_1x_1+n_2x_2+\cdots n_dx_d)}\Big].$$

Példák

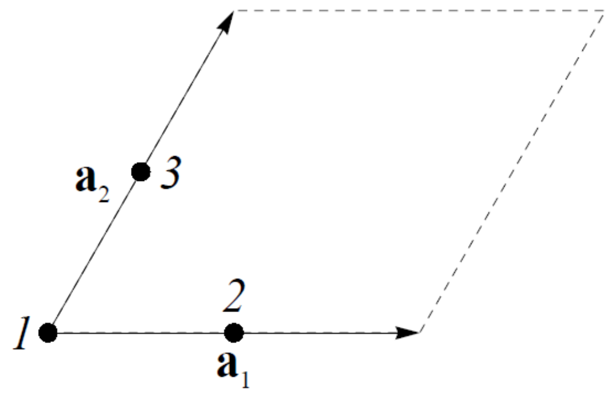
$$\mathbf{L}(\mathbf{k}) = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} -3 & 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_1} & 1 \\ 1 & -3 & 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_1} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_2} & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

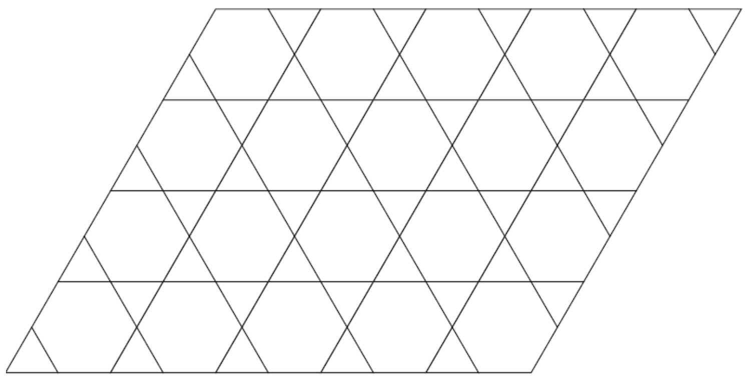


$$R_{12}(0,0) = \frac{R}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x_1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x_2}{2\pi}\,\frac{-9+4\cos x_1+4\cos x_2+\cos\left(x_1-x_2\right)}{-7+3\cos x_1+3\cos x_2+\cos x_1\cos x_2}.$$

$$R_{12}(0,0) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}\arctan\left(2\sqrt{2}\right)}{4\pi}\right)R \approx 0.6385R.$$

Kagomé-rács





$$\mathbf{L}(\mathbf{k}) = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} -4 & 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_1} & 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_2} \\ 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_1} & -4 & 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)} \\ 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_2} & 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)} & -4 \end{bmatrix}.$$

$$R_{12}(0,0) = R_{13}(0,0) = R_{23}(0,0) = R/2.$$

$$R_{33}(1,0) = R_{22}(0,1) = \left(\frac{4}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\right) R \approx 0.8120R.$$

Titkos kapcsolatok

$$R_{11}(m,n) = \frac{R}{9} + \frac{7}{3} R^{\triangle}(m,n) - \frac{1}{6}\left[R^{\triangle}(m-1,n+1) + R^{\triangle}(m+1,n-1)\right],$$

$$R_{12}(m,n) = \frac{R}{9} + \frac{5}{6}\left[R^{\triangle}(m,n) + R^{\triangle}(m+1,n)\right] + \frac{1}{6}\left[R^{\triangle}(m+1,n-1) + R^{\triangle}(m,n+1)\right],$$

$$R_{13}(m,n) = \frac{R}{9} + \frac{5}{6}\left[R^{\triangle}(m,n) + R^{\triangle}(m,n+1)\right] + \frac{1}{6}\left[R^{\triangle}(m+1,n) + R^{\triangle}(m-1,n+1)\right],$$

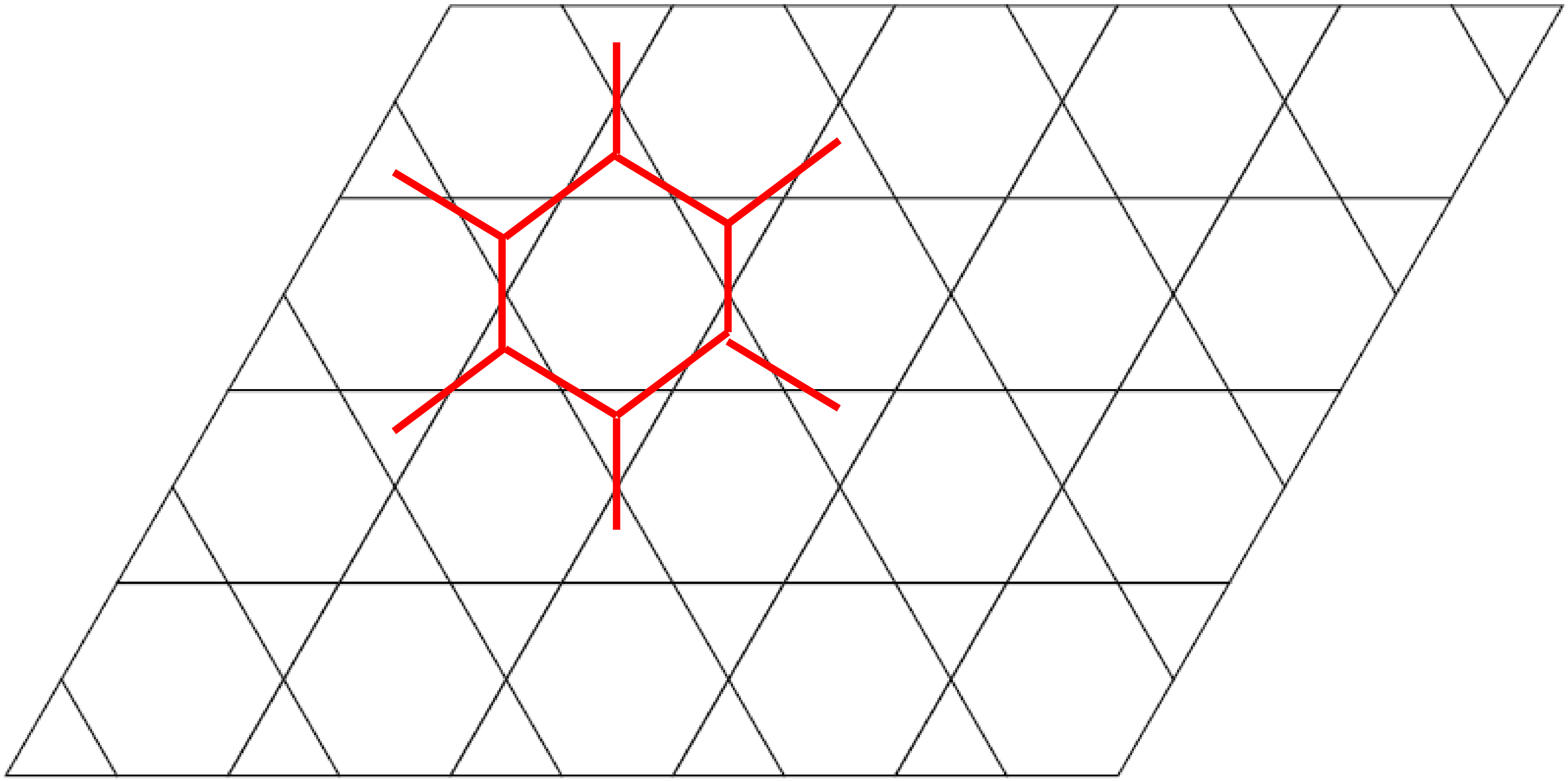
$$R_{22}(m,n) = \frac{R}{9} + \frac{7}{3} R^{\triangle}(m,n) - \frac{1}{6}\left[R^{\triangle}(m,n-1) + R^{\triangle}(m,n+1)\right],$$

$$R_{23}(m,n) = \frac{R}{9} + \frac{5}{6}\left[R^{\triangle}(m,n) + R^{\triangle}(m-1,n+1)\right] + \frac{1}{6}\left[R^{\triangle}(m-1,n) + R^{\triangle}(m,n+1)\right],$$

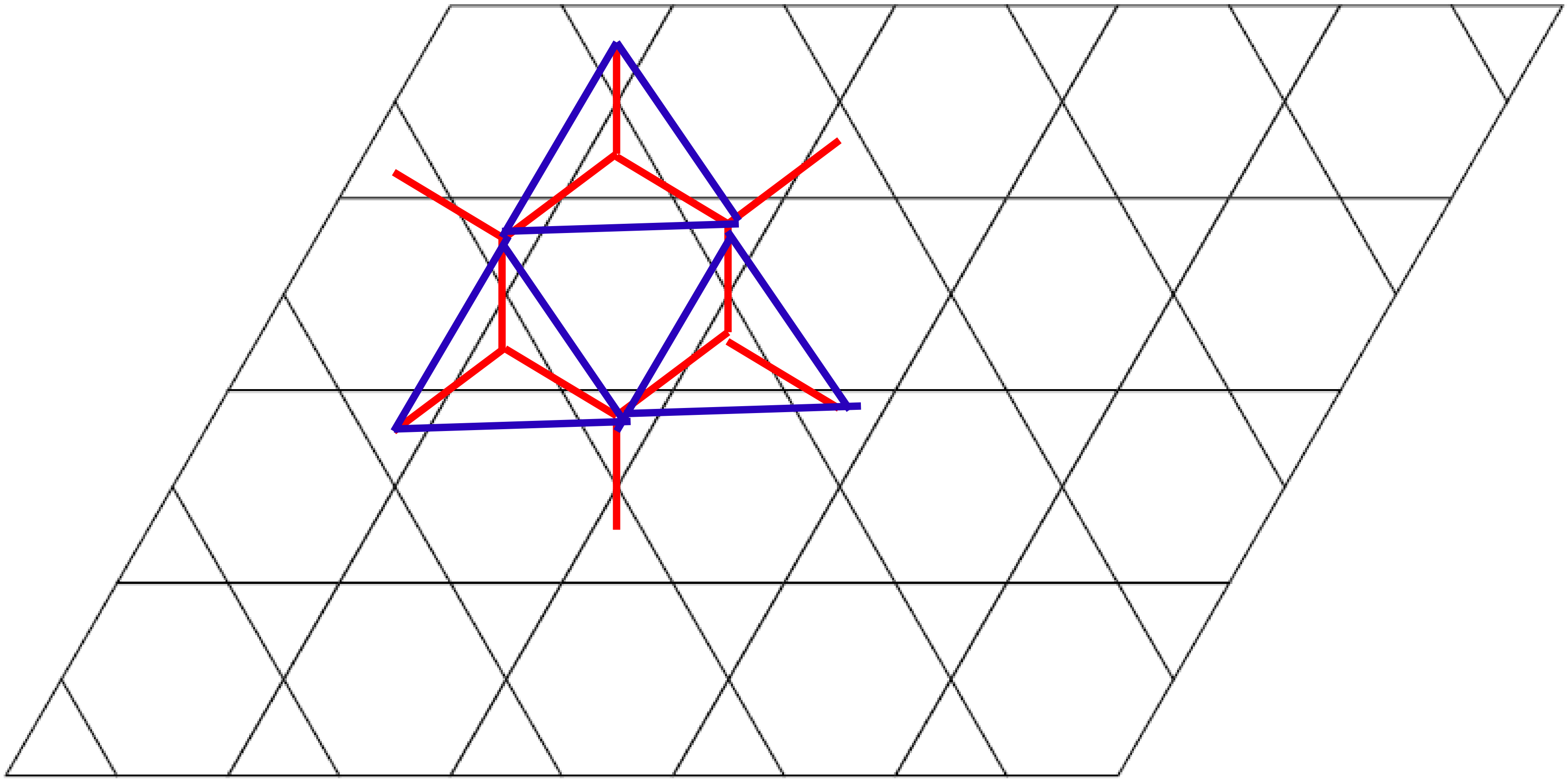
$$R_{33}(m,n) = \frac{R}{9} + \frac{7}{3} R^{\triangle}(m,n) - \frac{1}{6}\left[R^{\triangle}(m-1,n) + R^{\triangle}(m+1,n)\right].$$

Mi lehet ezen titkos kapcsolat mögött?

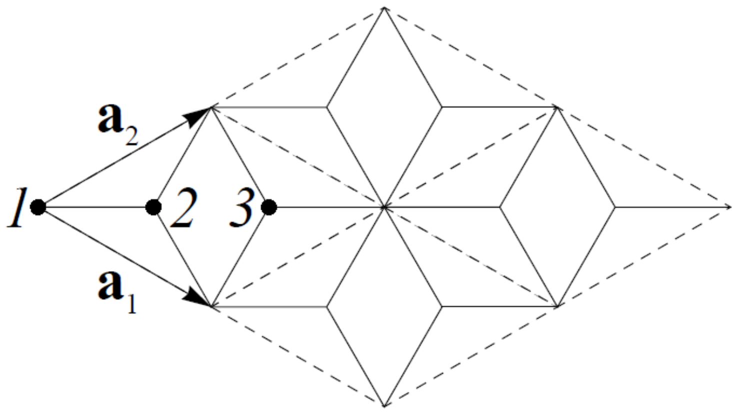
Csillag-delta

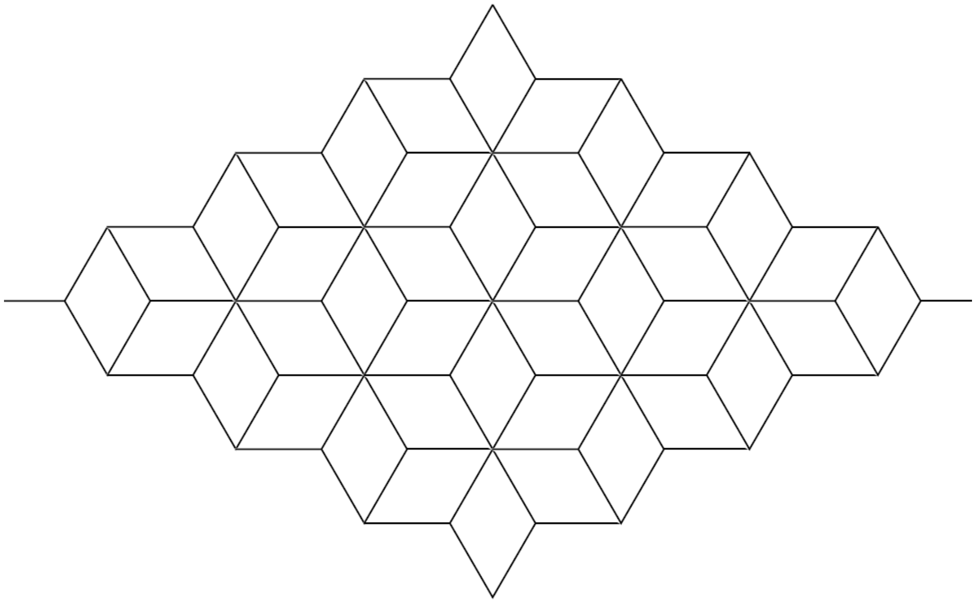


Csillag-delta



Kocka-rács





$$\mathbf{L}(\mathbf{k}) = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} -6 & A^* & B^* \\ A & -3 & 0 \\ B & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_2}$$

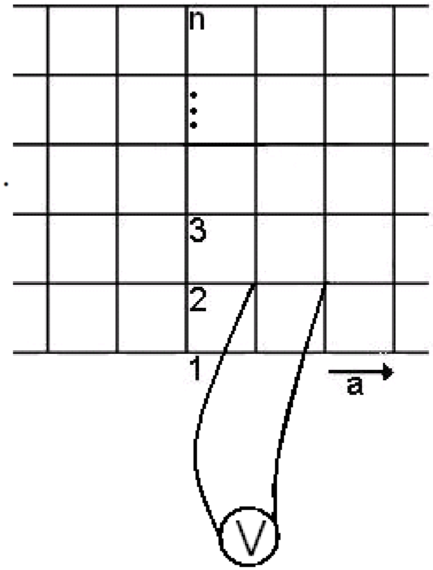
$$B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{a}_2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)}$$

$$R_{23}(0,0) = \left(\frac{5}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3\pi}\right) R$$

Kapcsolat háromszögráccsal!

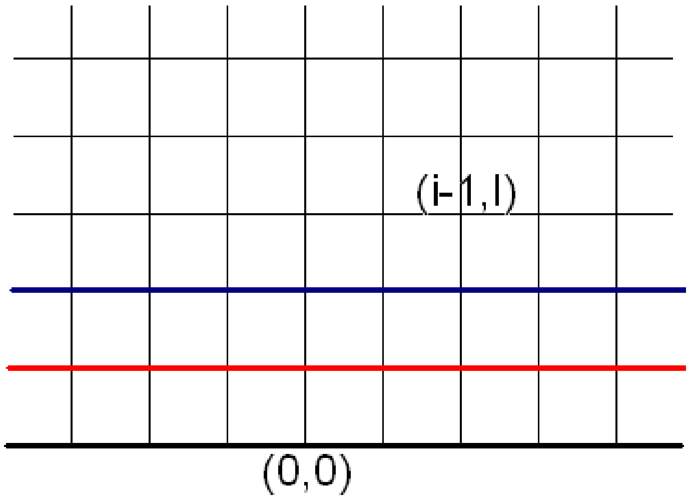
Szalagok

$$\mathbf{G}(\omega)_{ij} = \frac{\left[(1+\omega)U_{i-2}(\frac{\omega}{2}) - U_{i-3}(\frac{\omega}{2})\right]\left[(1+\omega)U_{n-j-1}(\frac{\omega}{2}) - U_{n-j-2}(\frac{\omega}{2})\right]}{(1+\omega)^2 U_{n-2}(\frac{\omega}{2}) - 2(1+\omega)U_{n-3}(\frac{\omega}{2}) + U_{n-4}(\frac{\omega}{2})}(-1)^{i+j+1}.$$



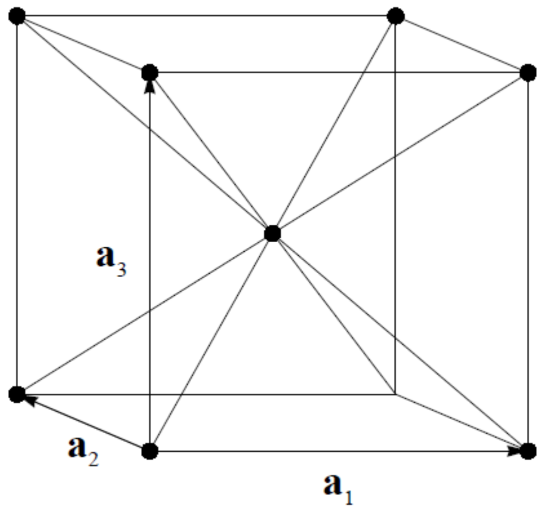
Csebisev-polinom

Félsík: (n→végtelen)



	i=1	i=2	i=3
l=1	$\frac{2}{\pi}$	1	$4-\frac{26}{3\pi}$
l=2	$+12-\frac{18}{\pi}$	$+6-\frac{64}{3\pi}$	$+150-\frac{2368}{5\pi}$
l=3	$+340-\frac{118}{3\pi}$	$\frac{46}{15\pi}$	$+200-\frac{66274}{105\pi}$

Fcc rács



$$\mathbf{L}(\mathbf{k}) = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} A-14 & B^* \\ B & -8 \end{bmatrix},$$ ahol

$$A = 2(\cos \mathbf{ka}_1 + \cos \mathbf{ka}_2 + \cos \mathbf{ka}_3),$$

$$B = (1+\mathrm{e}^{\mathbf{ika}_1})(1+\mathrm{e}^{\mathbf{ika}_2})(1+\mathrm{e}^{\mathbf{ika}_3})$$

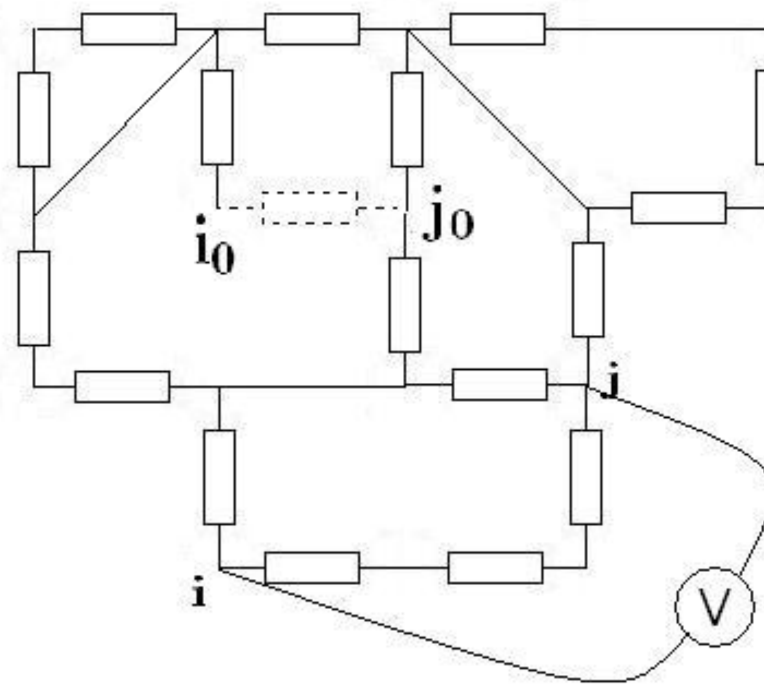
Numerikus eredmények R egységekben:

$$R_{12}(0,0,0) \approx 0.1945,\ R_{11}(1,0,0) \approx 0.1481,\ R_{11}(1,1,0) \approx 0.1651$$

Perturbált rácsok

perturbáció

$$\mathbf{G} = -(\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1)^{-1}.$$



Dyson-egyenlet: $$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{L}_1\mathbf{G}.$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{L}_1\mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{L}_1\mathbf{G}_0\mathbf{L}_1\mathbf{G}_0 + \dots .$$

Egzakt G, ha a perturbáció egy diád:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{u} \circ \mathbf{v})^{-1} = \mathbf{M}^{-1} - \frac{\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})\mathbf{M}^{-1}}{1 + \mathbf{vMu}}.$$

$$G(\mathbf{i},\mathbf{j}) = G_o(\mathbf{i},\mathbf{j}) + \frac{[G_0(\mathbf{i},\mathbf{i}_0) - G_0(\mathbf{i},\mathbf{j}_0)][G_0(\mathbf{i}_0,\mathbf{j}) - G_0(\mathbf{j}_0,\mathbf{j})]}{1 - [G_0(\mathbf{i},\mathbf{i}) + G_0(\mathbf{j},\mathbf{j}) - 2G_0(\mathbf{i},\mathbf{j})]}.$$

$$R(\mathbf{i},\mathbf{j}) = R_0(\mathbf{i},\mathbf{j}) + \frac{[R_0(\mathbf{i},\mathbf{i}_0) - R_0(\mathbf{i},\mathbf{j}_0) - R_0(\mathbf{j},\mathbf{i}_0) + R_0(\mathbf{j},\mathbf{j}_0)]^2}{4(R - R_0(\mathbf{i},\mathbf{j}))}.$$

Bolyongási probléma

Bizonyítás nélkül:
Az eredő ellenállás A és B pontok között:

$$R_{AB} = \frac{R}{N(A)p_{AB}},$$

ahol N(A) az A pont első szomszédjainak száma,
p_{AB} annak a valószínűsége, hogy az A pontból induló bolyongó előbb ér a B pontba, minthogy visszatér A-ba.

Összefoglalás

- Végtelen, *d* dimenziós, periodikus ellenállás-hálozatban két tetszőleges rácspont közti ellenállás számítása

  1. Green-függvénnyel, univerzális, receptszerű eljárás

  2. Elemi cellán belül lehetnek különböző ellenállások, sőt kondenzátor és induktivitás is

  3. *Leképezések:*
     Kagomé --- háromszögrács,
     dice lattice --- háromszögrács,
     dekorált négyzetrács --- négyzetrács

További kérdések?

- leképezések értelmezése?
- nem periodikus szerkezetek?
- véges rácsok?

Köszönöm a figyelmet!

Jozsef Cserti, Gabor Szechenyi, Gyula David:Uniform tiling with electrical resistors
J. Phys. A: Math. Theor. 44 215201.