Portfolió optimalizálás

- Adott ‘N’ db ‘T’ hosszúságú idősor (Hozamok idősora)
  - Lehet Gauss, Student, stb…
- A hozamok lehetnek korrelálatlanok, vagy korreláltak. Az igazi kovariancia mátrix (C). (Ezt úgy lehet mérni, ha ‘T’-t nagyon nagyra választjuk)
- A hozamok várható értéke nulla (nem nulla várható érték esetén is hasonló eredmények adódnak)
- Kockázati mérték (kvadratikus, lineáris)
  - Markovitz (kvadratikus)
  - Minimax (lineáris)
- Mellékfeltételek amelyek a feladatra bizonyos megszorításokat rónak ki. (lineáris mellékfeltételek)

Optimalizálás a gyakorlatban

- Általában a használható idősorok hossza: T~1000. Az ok: politikai viszonyok, általában vezetői ciklusok, stb…
- Az eszközök tipikus száma N~100-1000.

- Az eszközök száma és az idősor hossza közel azonos
- Időnként az eszközök száma nagyobb is mint az idősor hossza.
- Empirikus optimalizációs módszerek
  - Szektorok kialakítása
  - Lineáris mellékfeltételek alkalmazása

A probléma

- Ha T~N akkor az optimalizáció során a zajszint megemelkedik
- Az eredmény megbízhatósága csökken
- Az eredmény szórása növekszik
- …

Markovitz feladat

IID változók esetére (pl.)

Empirikus kovariancia mátrix: $$C_{i,j} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{i,t} \cdot Y_{j,t}$$

Az optimalizációs feladat: $$\sigma = \sum_{i,j=1}^{N} w_i \cdot C_{i,j} \cdot w_j$$

Mellékfeltétel: $$\sum_{j=1}^{N} w_j = 1$$

Ha N>T-1, nincs megoldása a feladatnak, mert nem lehet
Invertálni az empirikus kovariancia mátrixot

Megoldás

A portfolió súlyokra: $$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} C_{i,j}^{-1}}{\sum_{i,j=1}^{N} C_{i,j}^{-1}}$$

A megoldás hibájának a mérése:

$$q_0 = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} w_j^{meas} \cdot w_j^{meas}}{\sum_{j=1}^{N} w_j^{theor.} \cdot w_j^{theor.}}}$$

Iid esetben $w_j^{theor}=1/N$

q0 jelentése

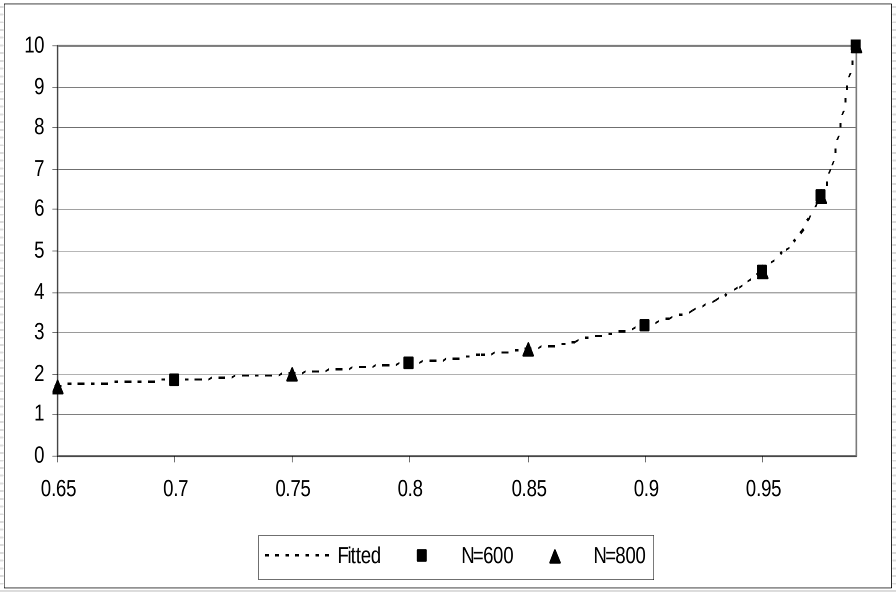
- A megoldás eltérését méri az elméleti értéktől
- Invariáns az elméleti és a mért megoldásvektorok által bezárt szögre
- Csak longitudinális eltéréseket mér
- Értéke korlátlanul nagy lehet
- A súlyok összege mindig 1, de egyes súlyok felvehetnek nagy negatív értékeket.

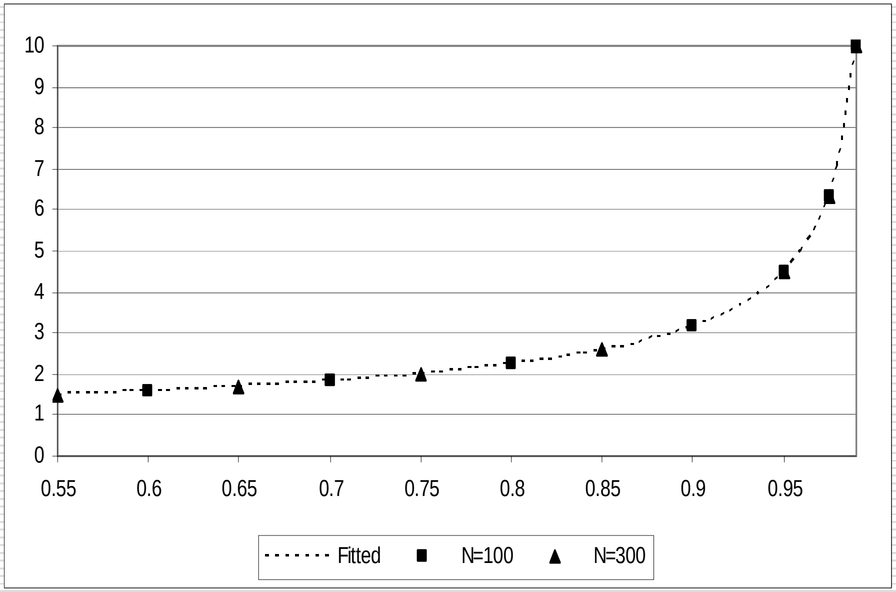
Mérések

- Mérési adatok:
  - N~100-1000
  - T~101-200, 1001~20000
  - Futási idők: N~1000-re néhány hét

- Mért paraméterek
  - q0 várható értéke
  - q0 szórása
  - q0 eloszlása
  - q0 momentumai

A várható érték

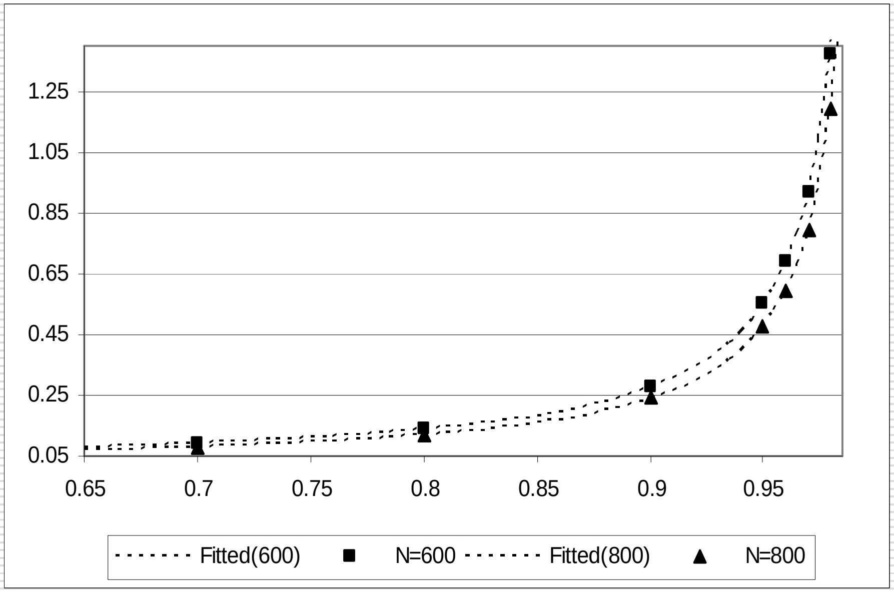




$$\bar{q}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{N}{T}}}$$

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-r}}$$

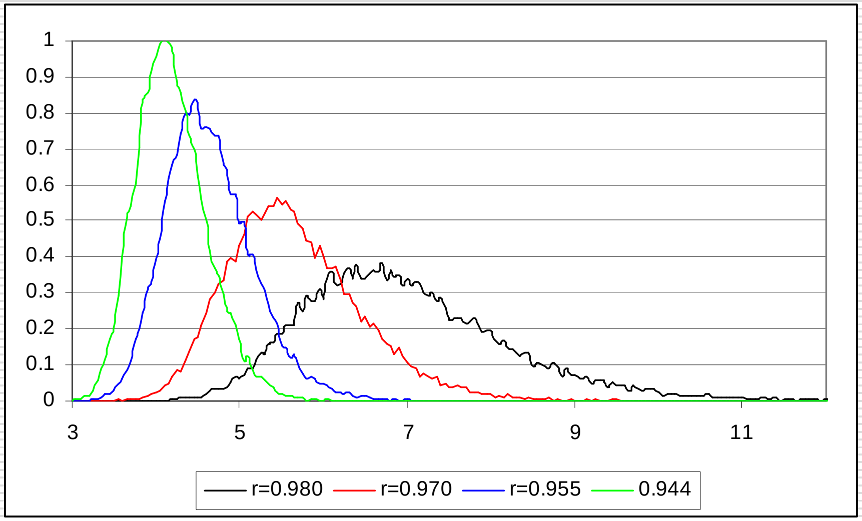
A szórás

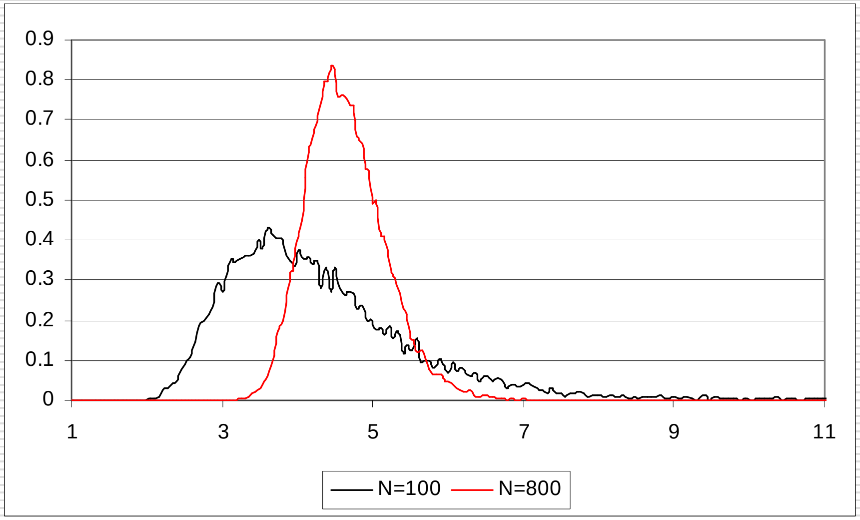


$$\sigma(q_0) = \frac{const}{\sqrt{N} \cdot (1-r)}$$

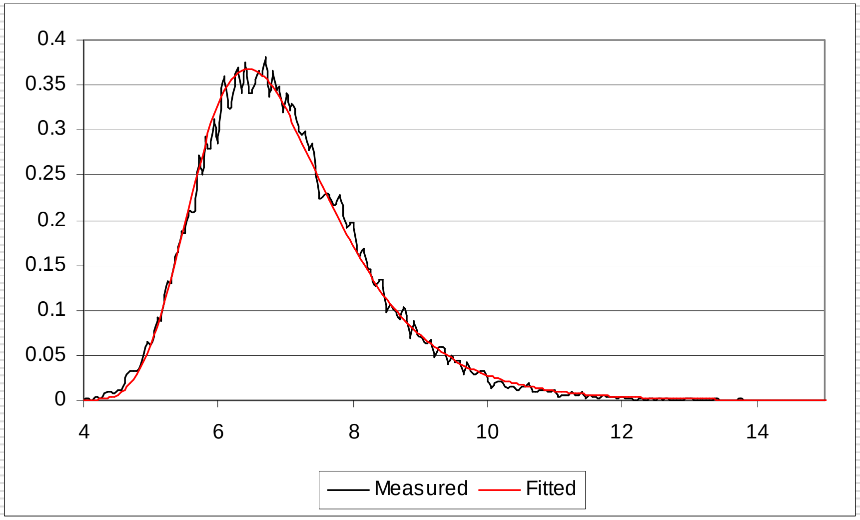
$$const \approx 0.67$$

Eloszlásfüggvény



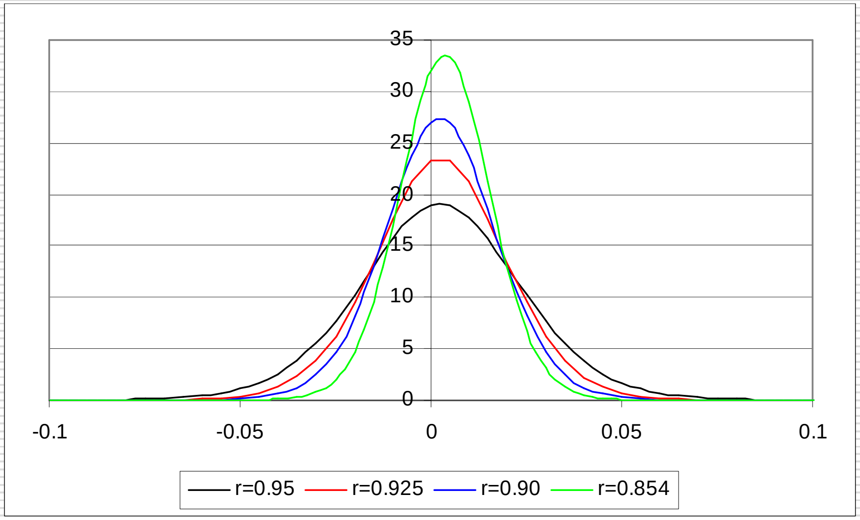


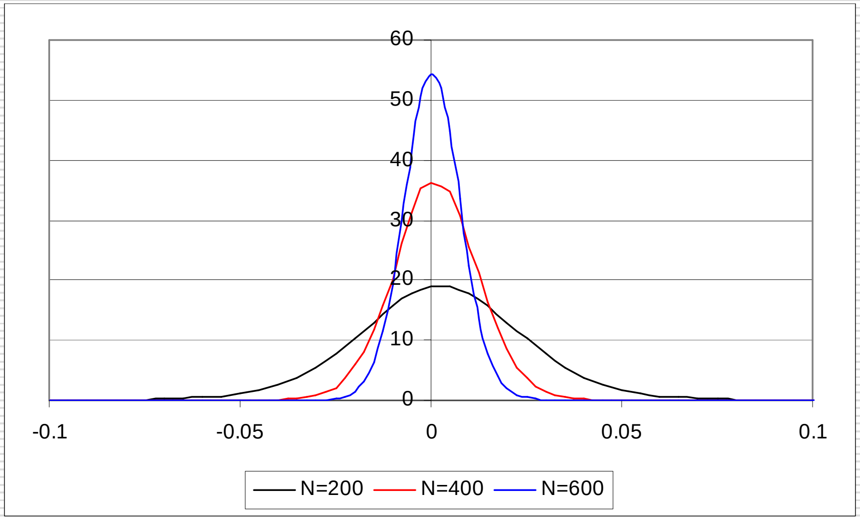
Az eloszlásfüggvény illesztése



$$f(x) = \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{x-a}{b}\right\}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{x-a}{b}\right\} \cdot \frac{1}{b}$$

A súlyok viselkedése





A divergencia okai

- A kovariancia mátrix egy Wishart mátrix

$$q_0 = \sqrt{N \cdot \frac{\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sigma_{i,k}^{-1} \cdot \sigma_{k,j}^{-1}}{\left\{\sum_{i,j=1}^{N} \sigma_{i,j}^{-1}\right\}^2}}$$

$$\sigma_{i,j}^{-1} = \sum_{k,l=1}^{N} \mathcal{O}_{i,l} \cdot \frac{\delta_{k,l}}{\lambda_l} \cdot \mathcal{O}_{k,j}^{-1} = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{O}_{i,k} \cdot \frac{1}{\lambda_k} \cdot \mathcal{O}_{k,j}^{-1}$$

$$\sigma_{i,j}^{-1} = \mathcal{O}_{i,1} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot \mathcal{O}_{1,j}^{-1} + \sum_{k=2}^{N} \mathcal{O}_{i,k} \cdot \frac{1}{\lambda_k} \cdot \mathcal{O}_{k,j}^{-1}$$

$$\mathcal{O}_{i,j}^{-1} = \mathcal{O}_{j,i}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \sigma_{i,j}^{-1} = \sum_{i,j=1}^{N} \left\{\mathcal{O}_{i,1} \cdot \mathcal{O}_{j,1}\right\} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{k=2}^{N} \left\{\sum_{i,j=1}^{N} \mathcal{O}_{i,k} \cdot \mathcal{O}_{j,k}\right\} \cdot \frac{1}{\lambda_k}$$

Folytatás

$$\epsilon_k = \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} \mathcal{O}_{i,k} \cdot \mathcal{O}_{j,k} \right\}$$

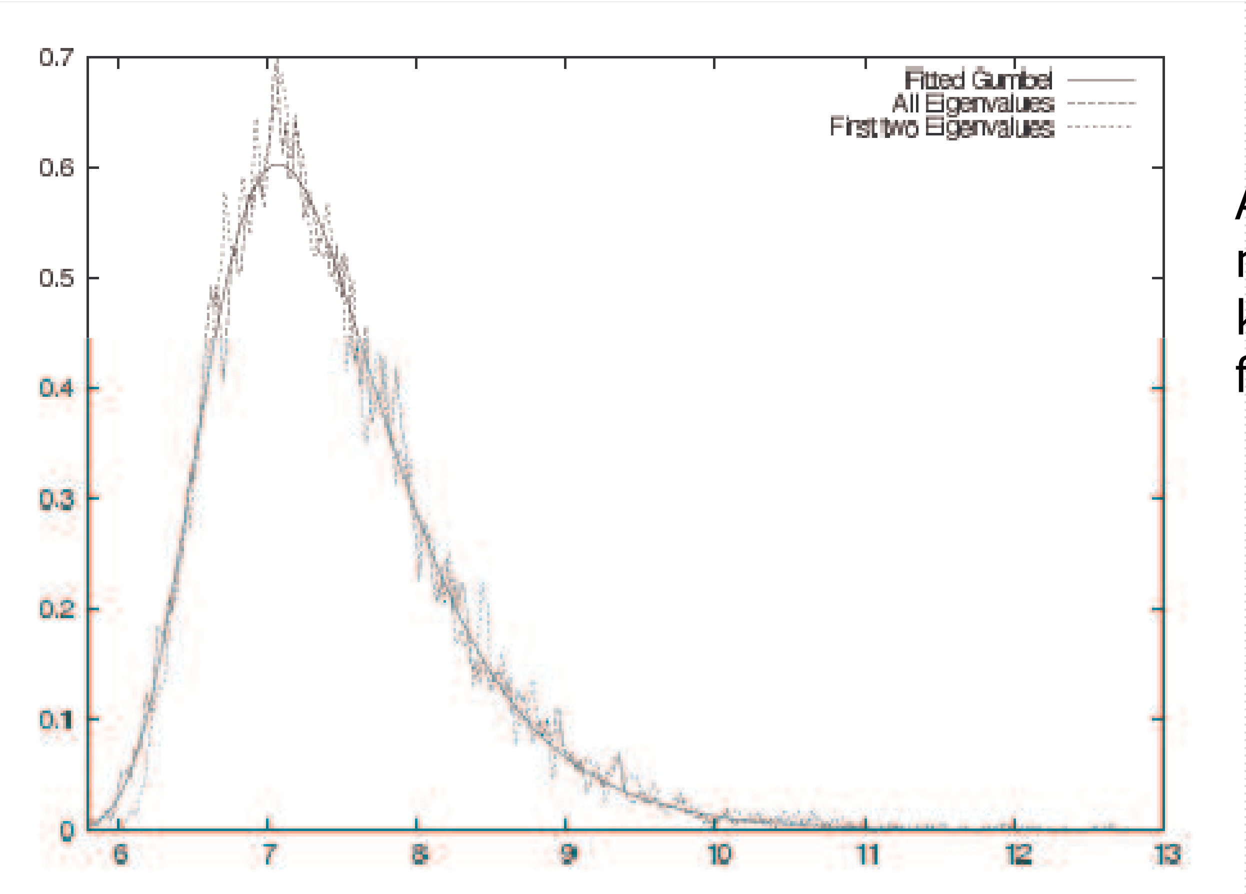
$$q_0 = \sqrt{N \cdot \left\{ \frac{\frac{\epsilon_1}{\lambda_1^2} + \frac{\epsilon_2}{\lambda_2^2} + \sum_{i=3}^{N} \frac{\epsilon_i}{\lambda_i^2}}{\{\frac{\epsilon_1}{\lambda_1} + \frac{\epsilon_2}{\lambda_2} + \sum_i = 3^N \frac{\epsilon_i}{\lambda_i}\}^2} \right\}}$$

- $s_1 = \frac{\epsilon_1}{\lambda_1^2}$
- $s_2 = \frac{\epsilon_2}{\lambda_2^2}$
- $s_B = \sum_{i=3}^{N} \frac{\epsilon_i}{\lambda_i^2}$
- $n_1 = \frac{\epsilon_1}{\lambda_1}$
- $n_2 = \frac{\epsilon_2}{\lambda_2}$
- $n_B = \sum_{i=3}^{N} \frac{\epsilon_i}{\lambda_i}$

$$q_0 = \frac{\sqrt{N \cdot (s_1 + s_2 + s_B)}}{n_1 + n_2 + n_B}$$

$$q_0 = \frac{\sqrt{N \cdot (\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \sum_{i=3}^{N} \frac{1}{\lambda_i^2})}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \sum_{i=3}^{N} \frac{1}{\lambda_i}}$$

A legkisebb két sajátérték

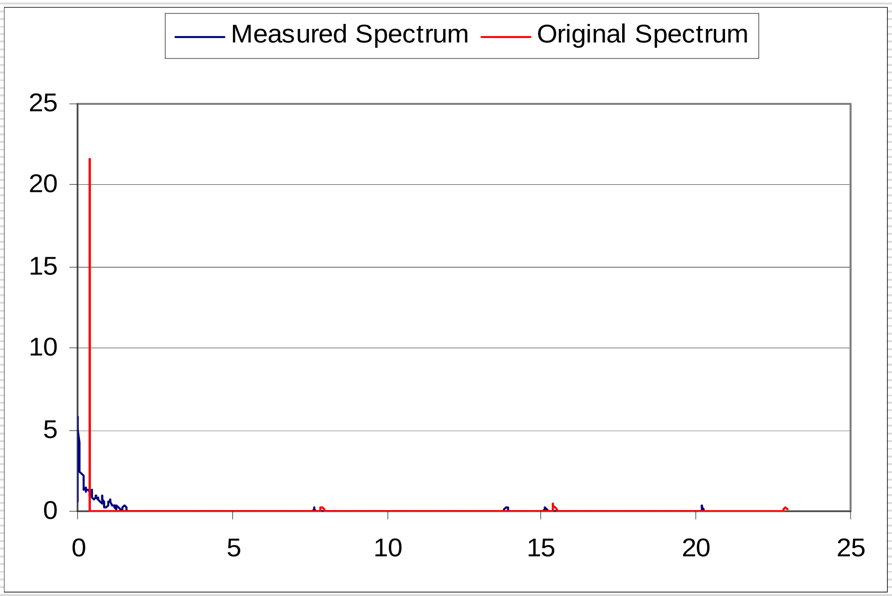


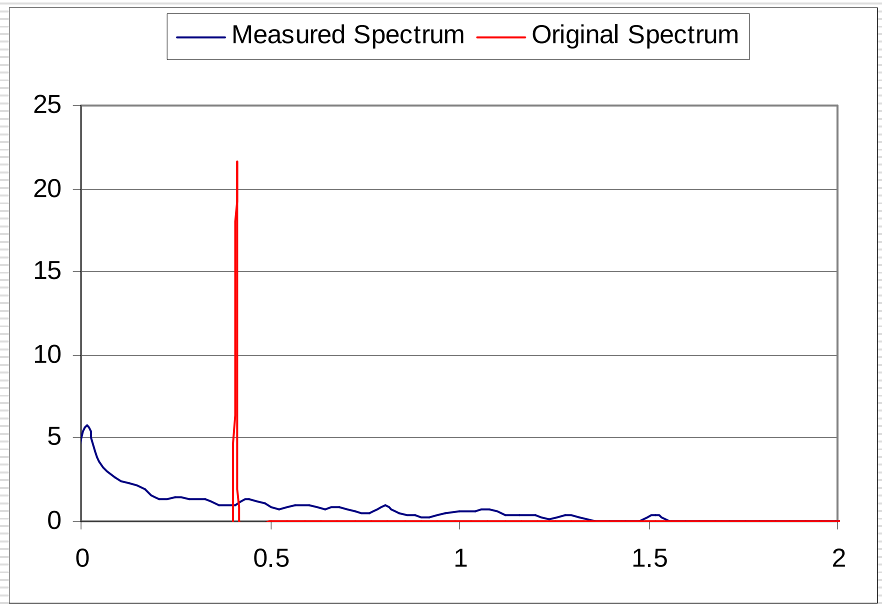
A q0-ban lévő nagy fluktuációkat a kis sajátértékek fluktuációja okozza

Piacmodellek

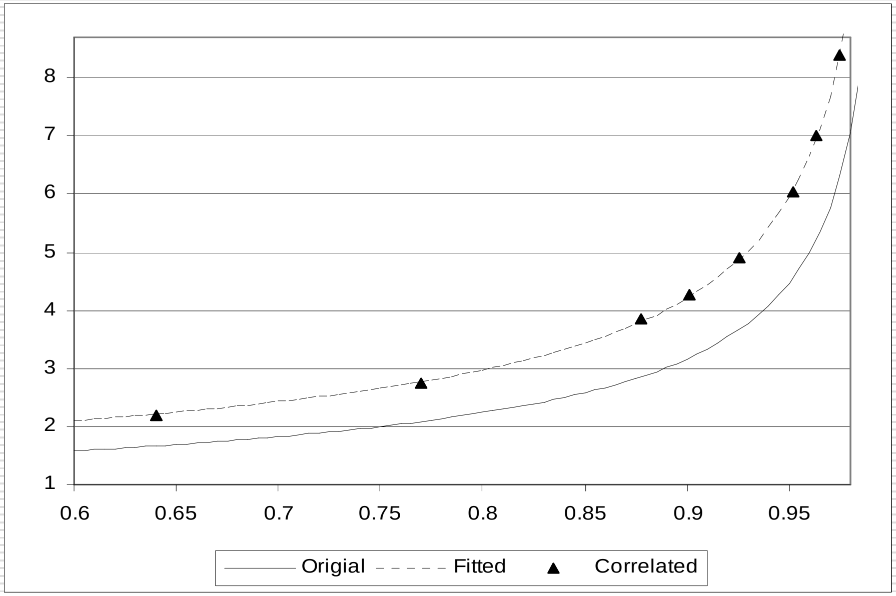
- Pl.: Blokkmodell

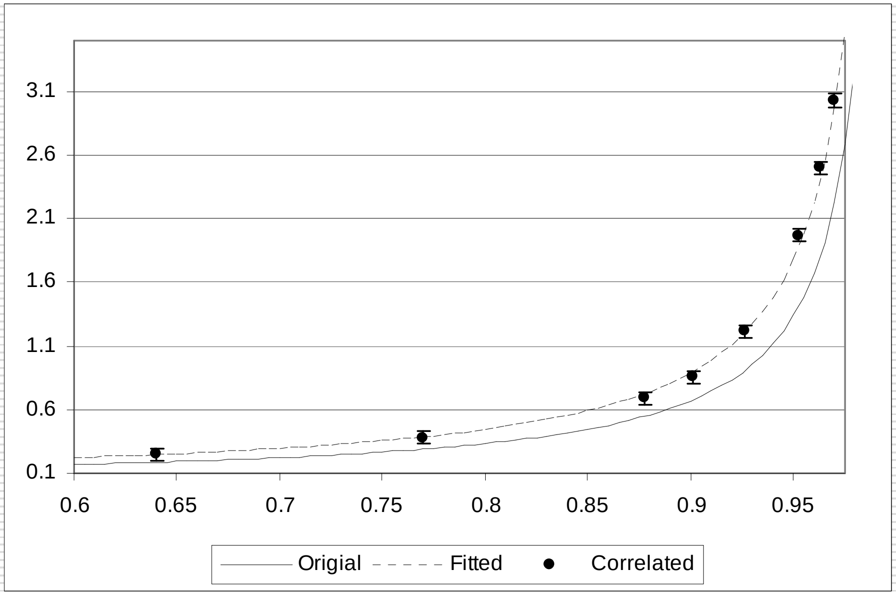
$$C_B = \begin{bmatrix} \overline{ep} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{ep} & \overline{em} & 0 \\ 0 & \overline{em} & \overline{ep} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{ep} \end{bmatrix}$$





A várható érték és a szórás





Nincs komoly változás az exponensek tekintetében

A minimax feladat

- Iid típusú hozamok

$$\min \quad \sigma^2$$
$$\sigma^2 = \sum_{i,j} w_i \cdot \sigma_{ij} \cdot w_j$$
$$\sum_i w_i = 1$$
$$a_i \le w_i \le b_i \qquad \forall i = 1..N,$$

- Lineáris programozási feladat

$$\min \quad u$$
$$u = -max_t \sum_i w_i \cdot x_{it}$$
$$\sum_i w_i = 1$$
$$a_i \le w_i \le b_i \qquad \forall i = 1..N,$$

A minimax főbb tulajdonságai

- Nincs minden esetben megoldás
- N=T/2 esetén van a fázishatár
- Q0 várható értékének kritikus exponense 0.5

Univerzalitás

Markowitz feladat

A kritikus exponens értéke Független:

-A változók közötti korreláció csak egy szorzófaktor erejéig befolyásolja az eredményt

Pl.: blokkdiagonális korrelációs mátrix

$$C_B = \begin{bmatrix} \overline{ep} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{ep} & \overline{em} & 0 \\ 0 & \overline{em} & \overline{ep} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{ep} \end{bmatrix} \qquad \overline{ep} = \begin{bmatrix} 1 & ep & \ldots & ep \\ ep & 1 & \ldots & ep \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ep & ep & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Minimax probléma

Fázisgörbe Független

-A bemeneti jelek statisztikájától: szimmetrikus eloszlás esetén alakja nem változik

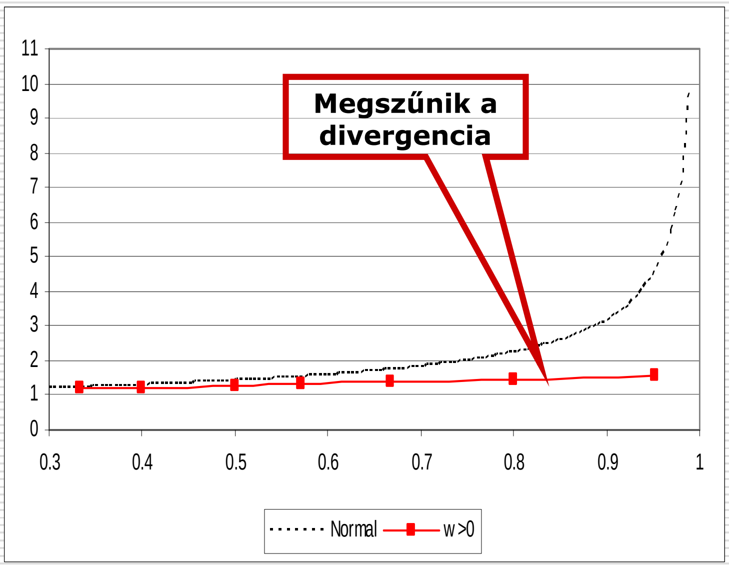
Pl.: Student, Cauchy

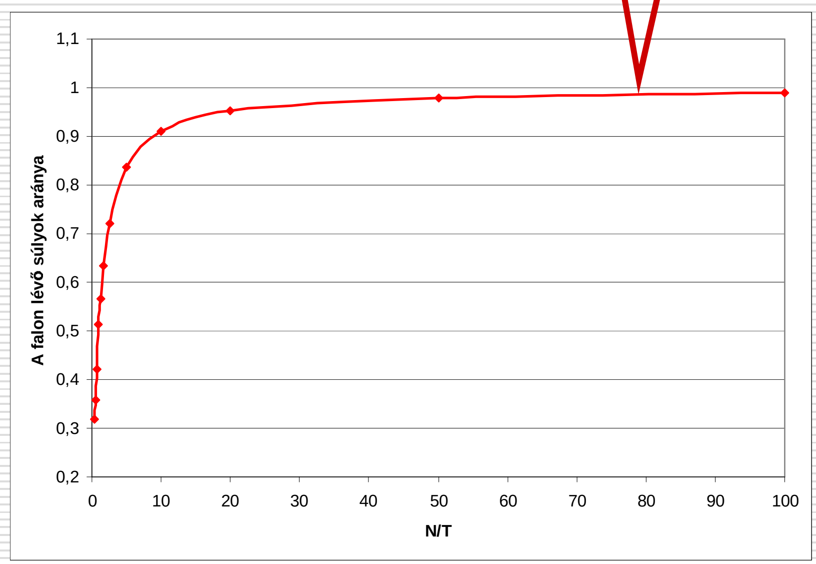
Véges térfogat I.
(Markovitz, minimax feladatok)

$w_i > const_i$ {i=1…N}

Portfolió súlyok véges térfogatban fordulhatnak elő

Majdnem minden súly a falon van



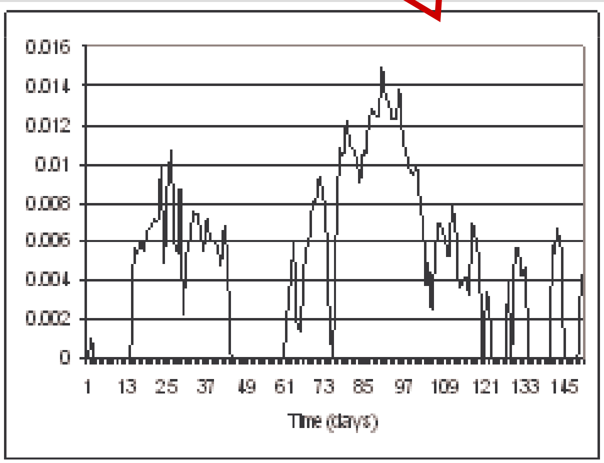


Véges térfogat II.

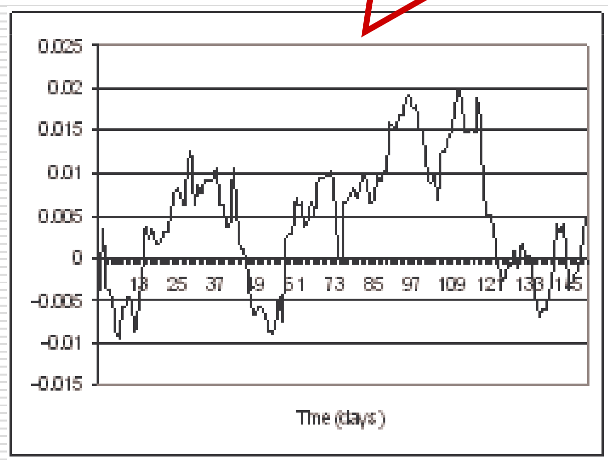
(Markovitz, minimax feladatok)

Egy kiszemelt súly ingadozása az idő függvényében véges térfogatú optimalizáció esetén

Véges térfogatban



Végtelen térfogatban



A súlyokból alkotott vektor iránya változik drasztikusan: transzverzális fluktuációk

Portfolió instabilitás és lineáris mellékfeltételek

Az optimalizálás

Input → **Output** → **Elemzés**

Optimalizáció

N: *az eszközök száma*
T: *az idősor hossza*
[r=N/T]

$\{w_i | i=1...N\}$
Portfolió súlyok

$\{a_i<w_i<b_{i,...}\}$
Mellékfeltételek

Lehetséges célfüggvények
Markowitz-szórás (kvadratikus)
Abszolút eltérés (lineáris)
Minimax (lineáris)
Expected Shortfall (lineáris)

Mértékek az eredmény pontosságának a meghatározására

$$q_0 = \left\langle \sqrt{\frac{\sum_{ij}\sigma_{ij}\cdot w_i^{meas.}\cdot w_j^{meas.}}{\sum_{ij}\sigma_{ij}\cdot w_i^{true}\cdot w_j^{true}}} \right\rangle_{x_{it}}$$

$$\phi = \left\langle \frac{(\vec{w}_{true}\cdot\vec{w}_{meas})}{|\vec{w}_{meas}|\cdot|\vec{w}_{true}|} \right\rangle_{x_{it}}$$

$$\zeta = \left\langle \frac{100}{N}\sum_i \Big(H_\delta(w_i-a_i)+H_\delta(w_i-b_i)\Big) \right\rangle_{x_{it}}$$

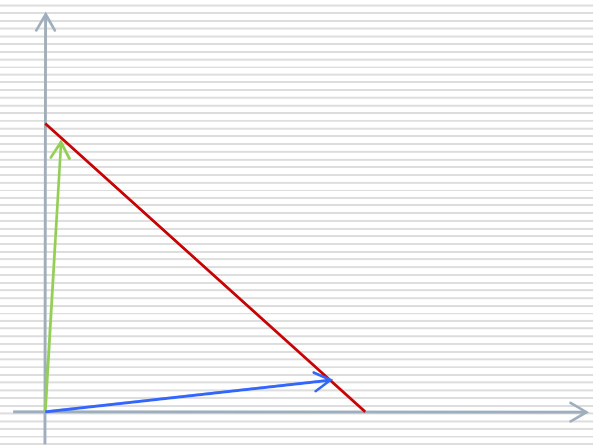
A jelenség szemléltetése

A feladat

$$\min \quad u$$
$$u = -\max_t \sum_i w_i \cdot x_{it}$$
$$\sum_i w_i = 1$$
$$a_i \le w_i \le b_i \qquad \forall i = 1..N,$$

2 Dimenzióban, mellékfeltételek

$W_1>0$,
$W_2>0$,
$W_1 + W_2 = 1$



A megoldás kitapad a mellékfeltételek által meghatározott poliéder falára (T~5, T~2*N)

A mértékek

$$q_0 = \left\langle \sqrt{\frac{\sum_{ij} \sigma_{ij} \cdot w_i^{meas.} \cdot w_j^{meas.}}{\sum_{ij} \sigma_{ij} \cdot w_i^{true} \cdot w_j^{true}}} \right\rangle_{x_{it}}$$

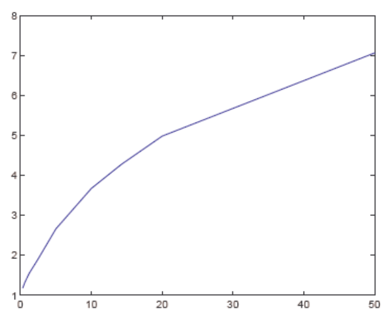
$$\phi = \left\langle \frac{(\overrightarrow{w}_{true} \cdot \overrightarrow{w}_{meas})}{|\overrightarrow{w}_{meas}| \cdot |\overrightarrow{w}_{true}|} \right\rangle_{x_{it}}$$

$$\zeta = \left\langle \frac{100}{N} \sum_i \Big(H_\delta(w_i - a_i) + H_\delta(w_i - b_i) \Big) \right\rangle_{x_{it}}$$

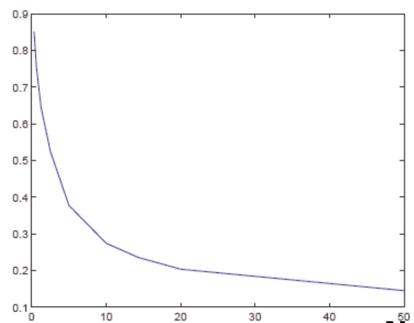
Longitudinális fluktuációk

Transzverzális fluktuációk

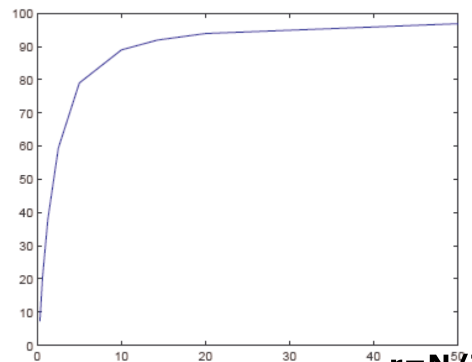
Falra tapadás mértéke



r=N/T



r=N/T



r=N/T

Általánosítás

Általános feladat, piaci modell

$$C = \begin{pmatrix} \overline{\rho_1} & \rho & \rho & \rho \\ \rho & \overline{\rho_1} & \overline{\rho_2} & \rho \\ \rho & \overline{\rho_2} & \overline{\rho_1} & \rho \\ \rho & \rho & \rho & \overline{\rho_1} \end{pmatrix} \qquad \overline{\rho_n} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_n & \dots & \rho_n \\ \rho_n & 1 & \dots & \rho_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_n & \rho_1 & \rho_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & min \quad u \\ u = -max_t \sum_i & w_i \cdot x_{it} \\ \sum_{i \in \{1 \dots N\}} & w_i = 1 \\ -1 \leq & \; w_{i \in S_1} \\ -3 \leq & \; w_{i \in S_3} \\ 0 \leq & \; w_{i \in S_3} \\ -0.5 \leq & \; w_{i \in S_4}, \end{aligned}$$

A jelenség itt is fellelhető, független a korrelációtól

Összefoglalás

Kockázati mérték

Kritikus pont

Lineáris mellékfeltételek (short selling tiltása…)

Kritikus pont közelében vagyunk

A megoldás mintáról mintára fluktuál, bár soha nem lesz végtelen, mindig megoldható a feladat

Köszönöm a figyelmet