

A hadronanyag véges hőmérsékletű fázisátalakulásai

1. Véges hőmérsékletű QCD a kontinuumban és rácson
2. Tiszta mértékelmélet
3. Véges méret skálázás
3. Lee-Yang zérusok
4. QCD termodinamika
4. Véges kémiai potenciál

A QCD szerint alacsony energián kvark–gluon bezárás van és a királis szimmetria spontán sérül. Ha a hőmérséklet vagy a sűrűség nagy egyik sem igaz. A fázis a kvark–gluon plazma.

Indoklás:

$T=0$ esetén r távolságú $q\bar{q}$ pár között lineáris potenciál hat ($V(r) = \sigma \cdot r$), a köztük kifeszülő húr miatt.

$T \neq 0$ esetben (hőtartályban) a húr termálisan fluktuál. $F(L) = V(L) - T \log N(L)$. Diszkrét tér esetén a húr tekinthető q -ból induló véletlen bolyongásnak $N(L) \approx (2d)^{L/a}$, azaz exponenciális L -ben. F csökken, ha T nő. $T_c \approx \sigma a / \log 2d$ esetén eltűnik. Nincs lineáris potenciál, nincs bezárás.

Királis szimm. visszaállítását l. később.

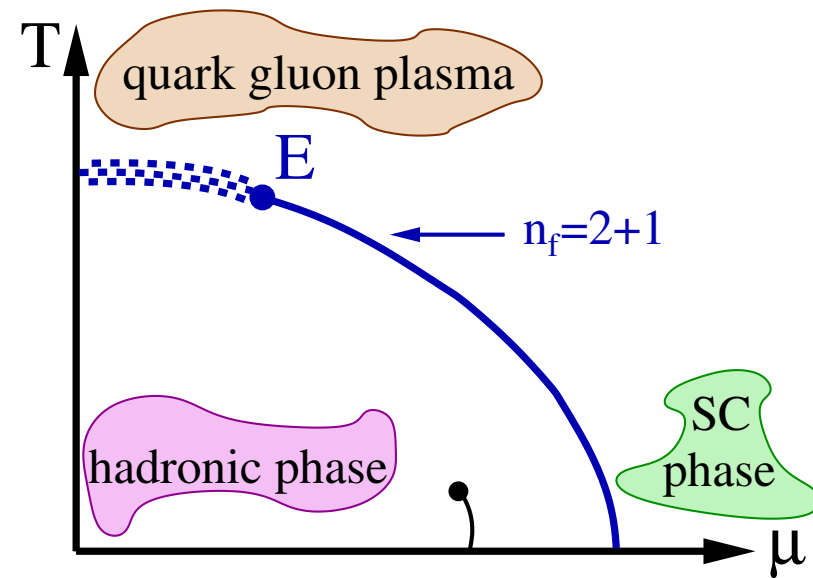
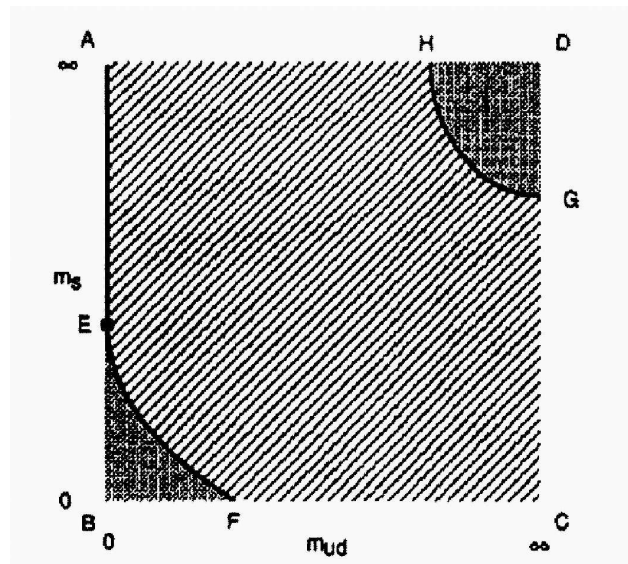
- A véges hőmérsékletű és kémiai potenciálú QCD alapvetően fontos

a korai Univerzumban (10^{-5} sec): nagy T , $\mu = 0$

neutron csillagokban: nagy μ , $T = 0$

nehéz ion ütközésekben (RHIC, GSI, LHC): nagy T , kis μ

- QCD fázis diagramok:



- nem-perturbatív módszer: rács QCD

Királis szimmetria QCD-ben

spectrum: ud-kvarkok $m_{ud} \approx 7$ MeV, s-kvark $m_s \approx 150$ MeV

T függvényében tanulmányozzuk a királis szimmetriát ezen kvarkokkal

- N_f kvark ízre q_i , $i=1, \dots, N_f$ a királis szimmetria:

$$\begin{aligned} q_{Li} &= (1 - \gamma_5)q_i/2 \longrightarrow q_{Lj}V_{ji} & V &\in SU_L(N_f) \\ q_{Ri} &= (1 + \gamma_5)q_i/2 \longrightarrow q_{Rj}U_{ji} & U &\in SU_R(N_f) \end{aligned}$$

A kvark tömeg soft sértést jelent a királis szimmetriára:

$$\mathcal{L}_m = \sum_{i=1}^{N_f} m_{qi} \bar{q}_i q_i$$

T=0 esetén a királis szimmetria spontán sérül $SU_{L+R}(N_f)$ -re
 $N_f^2 - 1$ Goldstone bozon van (pseudoskalár mezon oktett)

- különböző hatásokra vannak rács eredmények
Nagy T esetén a királis szimmetria nem sérül

A szimmetria rendparamétere: $M(x) = \bar{q}_L q_R$. Ha ez nem zérus, sérül a szimmetria. A helyzet hasonló egy ferromágneshoz, ahol az effektív spin $M(x)$, ami az íz térben spontán mágnesezettséget mutat. Magas hőmérsékleten ez eltűnik, azaz helyreáll a királis szimmetria.

Véges hőmérsékletű QCD a kontinuumban

$$Z = \text{Tr}(e^{-H/T}) = \int \prod dA_\mu(x) \prod dq(x) d\bar{q}(x) \exp(-S_{QCD}^E[A, q, \bar{q}]),$$

$$S_{QCD}^E[A, q, \bar{q}] = \int_0^{1/T} d\tau \mathcal{L}_{QCD}^E$$

Termális átlag:

$$\langle \mathcal{O}(A, q, \bar{q}) \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod dA_\mu(x) \prod dq(x) d\bar{q}(x) \mathcal{O}(A, q, \bar{q}) \exp(-S_{QCD}^E[A, q, \bar{q}]).$$

Periodikus (antiperiodikus) határfeltételek a 4. irányban A (q, \bar{q}) esetén.

Perturbációszámítás kidolgozható. UV véges, de IR divergens, így nehezen kezelhető. Részsorok felösszegzésével próbálkoznak.

Tiszta mértékelmélet

A statikus kvark szabad energia és a Polyakov hurok operátor

F_q jó rendparaméter: bezárás esetén $F_q = \infty$, egyébként véges.

$\exp(-F_q/T) = \frac{\text{Tr}(e^{-H/T} P_q)}{\text{Tr}(e^{-H/T})}$, ahol P_q x helyen levő statikus kvarkra proiciál. A statikus kvark időfejlődéséből adódik:

$\Omega(x) = \frac{1}{N} \text{Tr}[P \exp i \int_0^{1/T} d\tau A_4(\tau, x)]$ faktor, ez a Polyakov hurok.

Tehát $\exp(-F_q/T) = \langle \Omega(x) \rangle$.

A rácson n helyen véve: $\Omega_n = \frac{1}{N} \text{Tr}(\prod_{t=0}^{N_t-1} U_{(nt)4})$.

Bezárás: $\langle \Omega \rangle = 0$ egyébként nem zérus.

Megadható a potenciál is:

$\exp(-\frac{F_{q\bar{q}}(r)}{T}) = \langle \Omega(x) \Omega(y)^\dagger \rangle$.

Bezárás: $F_{q\bar{q}}(r) \sim \mu r$, egyébként állandó, exp. korrekcióval.

A centrum $Z(N)$ szimmetria

$SU(N)$ centruma a $Z(N)$, ez az N . egységgyökökből áll.

$Z(N)$ trafóra \mathcal{S}_{gluon} invariáns, és

$$\Omega_{n4} \rightarrow \zeta \Omega_{n4}.$$

Tehát a bezárás \rightarrow nem bezárás fázisátmenethez tartozó szimmetria a $Z(N)$ és a rendparaméter a Polyakov hurok.

Erős csatolású sorfejtésben kiszámolható a Polyakov hurok és zérus az eredmény.

A kontinuum limeszt a renorm csoport szerint kell venni:

Ha a rácsállandó csökken – az aszimptotikus szabadság miatt – a csatolás is csökken. Mivel $T = 1/N_t a$, a hőmérséklet nő. Fix N_t -re az erős csatolás a legkisebb hőmérséklet, a gyenge a magas hőmérséklet.

Gyenge csatolás esetén a szokásos perturbációszámítás véges értéket ad.

Közben kell lenni fázisátmenetnek.

A Polyakov hurok effektív hatás

$$Z = \int \prod_n d\Omega_n e^{-S_{eff}(\Omega)}$$

Ennek tulajdonságai: $Z(N)$ szimm., 3-dim. rendszer, short-range.

Mean field analízis: $S_{eff}(\Omega)/T = \alpha(T)|\Omega|^2 + \beta(T)|\Omega|^4 + \gamma(T)(\Omega^N + \Omega^{\dagger N}) + \mathcal{O}(\Omega^6)$.

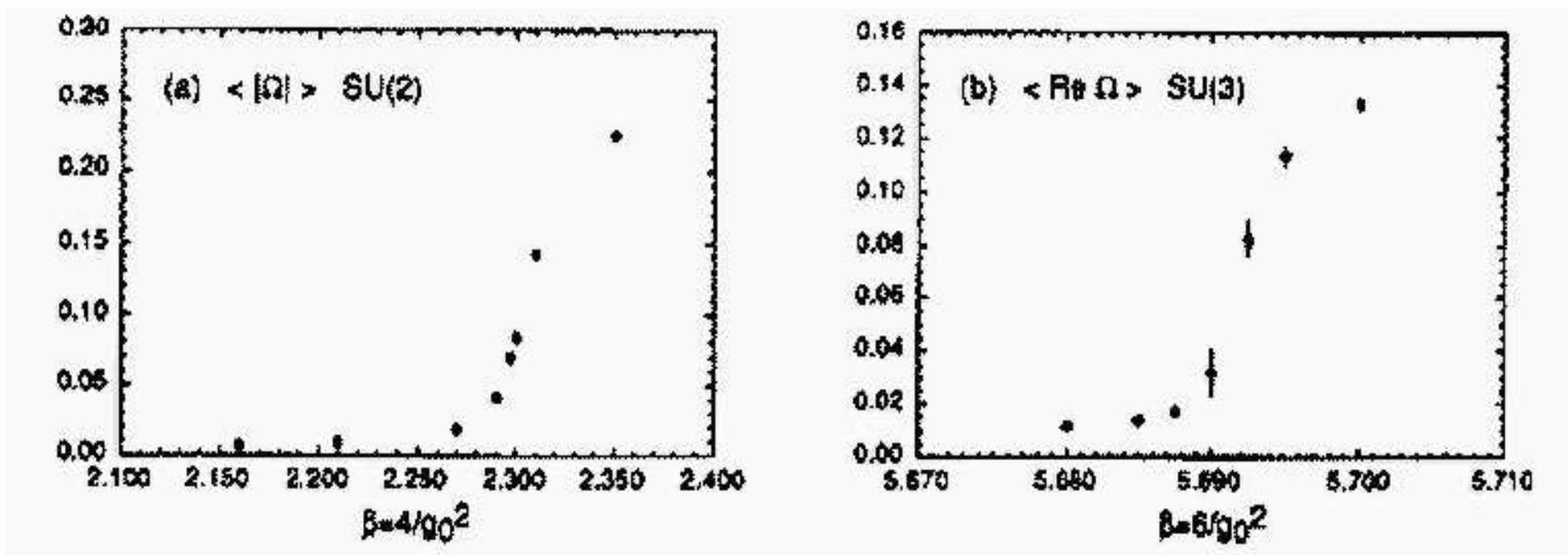
$N=2$ és 4 felett másodrendű, $N=3$ -ra elsőrendű fázisátmenet adódik.

Persze nem megbízható jóslat. Véges méret skálázást kell megneézni.

Véges méret skálázási elmélet

- Monte-Carlo szimulációknál a fázis átmenet tanulmányozása problematikus

Monte-Carlo szimulációk tiszta mértékelméletben ($V = 24^3 \cdot 4$) van átmenet a bezáró és a felszabadító fázisok között a Polyakov hurok gyorsan változik β kis tartományában



- elméleti jóslat: SU(2) másodrendű, SU(3) elsőrendű
Polyakov hurok: SU(2) szinguláris hatvány, SU(3) ugrás
nem látszik az adatokon

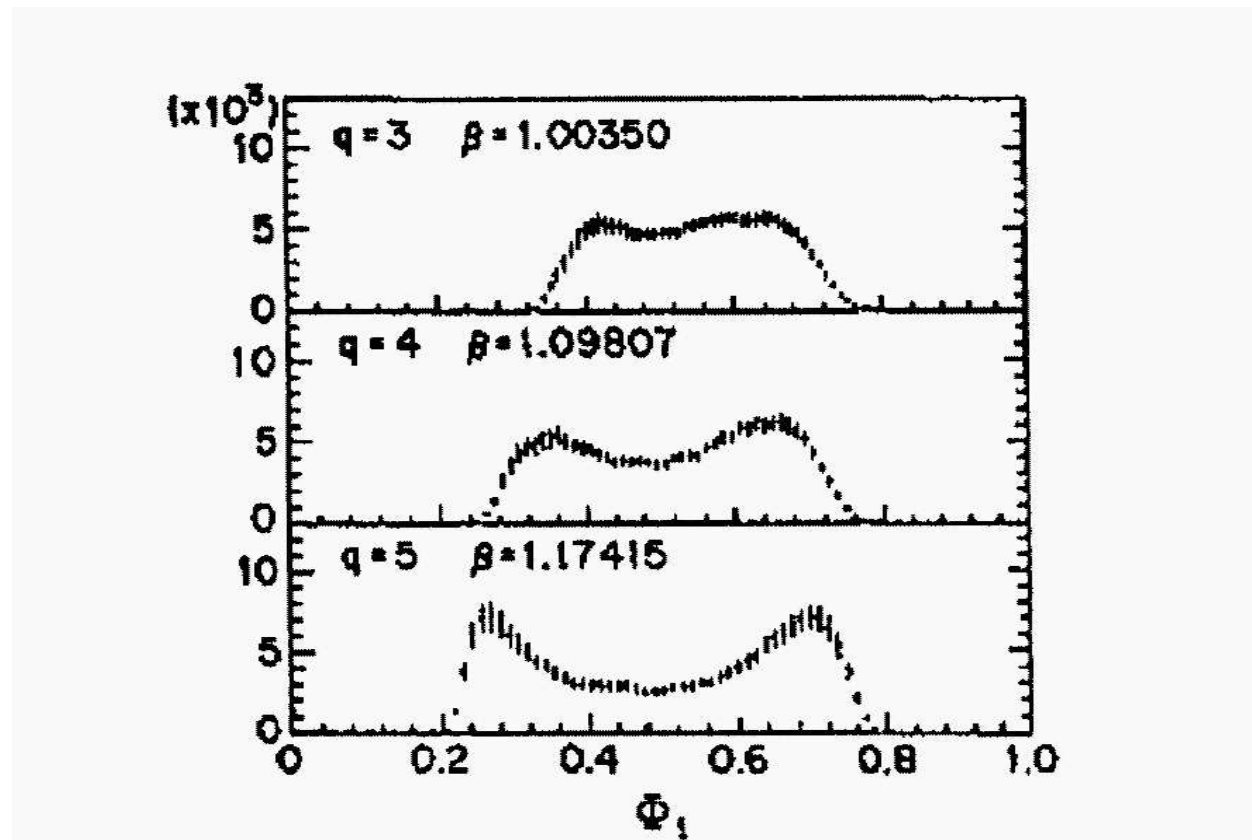
- a Monte-Carlo idő történetek problémái
elsőrendű esetben 2 minimuma van F -nek (magas és alacsony T -jű fázis)

a szabad energiák degeneráltak T_c -nél, ide-oda billeg "flip-flop"
az eloszlásnak 2 csúcsa van

ezt nem mindig lehet látni az adatokban

még rosszabb eset: 2. rendű esetben is előfordul:

(10 millió sweep a 4-állapotú Potts modellben 256^2 rácson)



- a probléma oka

a Monte-Carlo szimulációk mindig véges térfogatra történnek
igazi matematikai szingularitás csak a $V \rightarrow \infty$ limeszben van
véges V : a mennyiségek a csatolás analitikus függvényei

- fontos tény:

a mennyiségek **hőmérséklet függése** egyre inkább
szinguláris lesz nagyobb rácsokon

a méret függés a szingularitásra jellemző

⇒ a kritikus tulajdonságokat a véges méret skálázás adja
megkülönböztethető az 1. és 2. rendű fázisátmenet
megadható a bezáró/királis átmenet rendje

Critical exponents

- d-dim spin system with σ_n variables and $H(\sigma)$ Hamiltonian
critical temperature of a second order transition: T_c
reduced temperature: $(T - T_c)/T_c$ external magnetic field: h
six critical exponents characterize the critical behaviour

spontaneous magnetization (2 exponents):

$$M(t, h = 0) \sim t^\beta, \quad M(t = 0, h) \sim h^{1/\delta}$$

specific heat and magnetic susceptibility (1-1 exponent):

$$C(t, h = 0) \sim t^{-\alpha}, \quad \chi(t, h = 0) \sim t^{-\gamma}$$

correlation length and 2-point function at T_c (1-1 exponent)

$$\xi(t, h = 0) \sim t^{-\nu}, \quad \Gamma(r, t = 0, h = 0) \sim r^{-d-2+\eta}$$

only two of the six exponents are independent

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 - d\nu & \beta &= \nu(d - 2 + \eta) \\ \gamma &= \nu(2 - \eta) & \delta &= (d + 2 - \eta)/(d - 2 + \eta)\end{aligned}$$

• renormalization group transformation

by definition leaves the partition function Z invariant

free energy density $F = \log(Z)/V$ invariant (except for volume)

$$F(t, h) = b^{-d} F(b^{y_t} t, b^{y_h} h)$$

\Rightarrow scaling laws for thermodynamic quantities

appropriate derivatives of $F(t, h)$ with respect to t and h

e.g. magnetic susceptibility is obtained by $\partial^2 / \partial h^2$

$$\chi(t, h) = \frac{\partial^2}{\partial h^2} F(t, h) |_{h=0}$$

$$= b^{2y_h - d} \frac{\partial^2}{\partial h^2} F(b^{y_t} t, h) |_{h=0} = t^{-(2y_h - d)/y_t} \frac{\partial^2}{\partial h^2} F(1, h) |_{h=0}$$

gives the relationship between the exponents γ and y_t, y_h
the other critical exponents can be obtained similarly

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 - d/y_t & \beta &= (d - y_h)/y_t & \gamma &= (2y_h - d)/y_t \\ \delta &= y_h/(d - y_h) & \nu &= 1/y_t & \eta &= d + 2 - 2y_h\end{aligned}$$

● two remarks:

(i) mean field theory: $\alpha=0, \beta=1/2, \gamma=1, \delta=3, \nu=1/2$ and $\eta=0$
scaling relations are satisfied only in 4 dimensions

(ii) first order transitions are generally not covered by
renormalization group fixed points

Finite-size scaling for second order transitions

- free energy density for a finite size L (volume: L^d) obtained after a renormalization group transformation

$$F(t, h, L) = b^{-d} F(b^{y_t} t, b^{y_h} h, L/b)$$

consider the magnetic susceptibility χ for a finite system (simply the the second derivative of the free energy density) peak around the transition T , higher and sharper for larger V

$$\chi(t, h, L) = b^{2y_h - d} \chi(b^{y_t} t, b^{y_h} h, L/b)$$

use $y_t = 1/\nu$ and $2y_h - d = \gamma/\nu$ and set $b=L$ and $h=0$

$$\chi(t, h = 0, L) = L^{\gamma/\nu} \phi_\chi(L^{1/\nu} t) \quad \phi_\chi(x) = \chi(x, h = 0, 1)$$

- important observation:

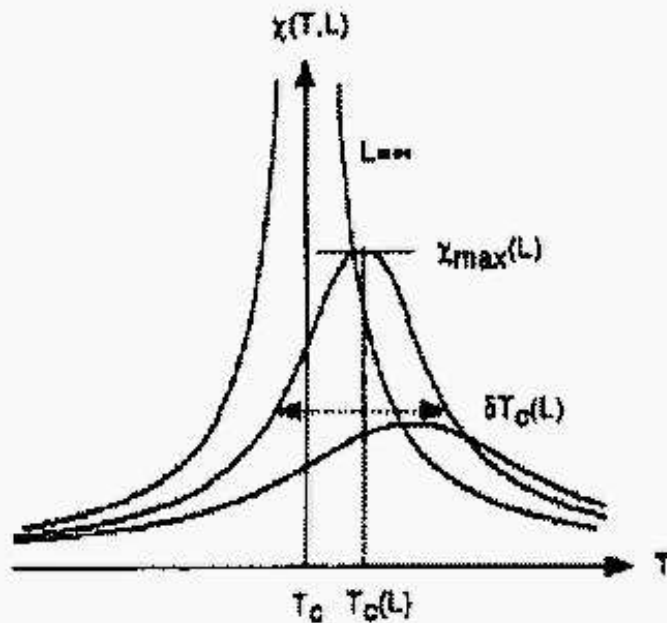
the combination $L^{-\gamma/\nu}\chi(t, h = 0, L)$ is a universal function of the scaling variable $x = L^{1/\nu}t$ independent of the system size L

- three remarks:

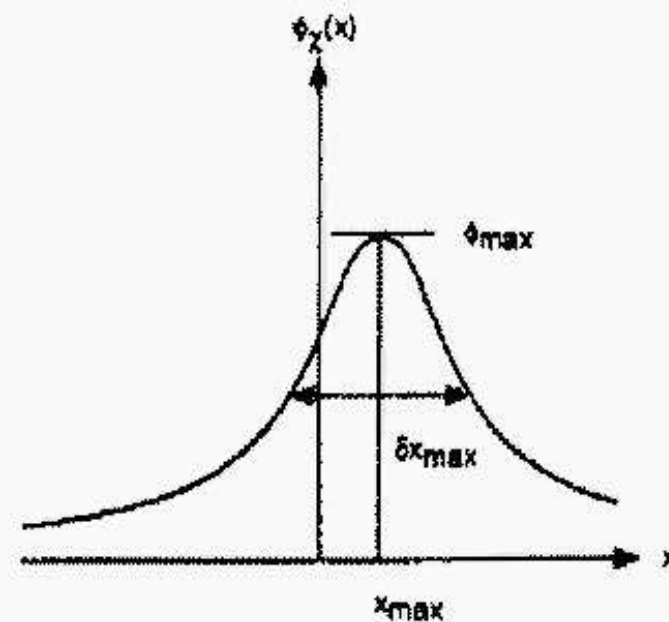
(i) $\chi(t, h = 0, L)$ is peaked in $t \Rightarrow \phi_\chi(x)$ is also peaked

(ii) $\chi(t, h = 0, L)$ is smooth at $t=0 \Rightarrow \phi_\chi(x)$ is analytic

(iii) $\chi(t, h = 0, L \rightarrow \infty) \sim t^{-\gamma}$, thus $\phi_\chi(x) \rightarrow x^{-\gamma}$ as $x \rightarrow \pm\infty$



(a) magnetic susceptibility χ



(b) scaling function for χ

- let ϕ_{max} height, x_{max} position and δx_{max} width of the peak
similarly define $\chi_{max}(L)$, $T_c(L)$ and $\delta T_c(L)$ for $\chi(t, h = 0, L)$
scaling relation relates the characteristics of the peaks

$$\chi_{max}(L) = L^{\gamma/\nu} \phi_{max} \quad L^{1/\nu} [T_c(L) - T_c] / T_c = x_{max} L^{1/\nu}$$

$$\delta T_c(L) / T_c = \delta x_{max}$$

asymptotic prediction of finite-size scaling theory ($L \rightarrow \infty$)

$$\chi_{max}(L) \rightarrow L^{\gamma/\nu} \quad T_c(L) - T_c \rightarrow L^{-1/\nu} \quad \delta T_c(L) \rightarrow L^{-1/\nu}$$

similar finite-size scaling laws for other quantities

important case: correlation length diverges linearly with L

$$\xi(t, L) = L \phi_\xi(L^{1/\nu} t)$$

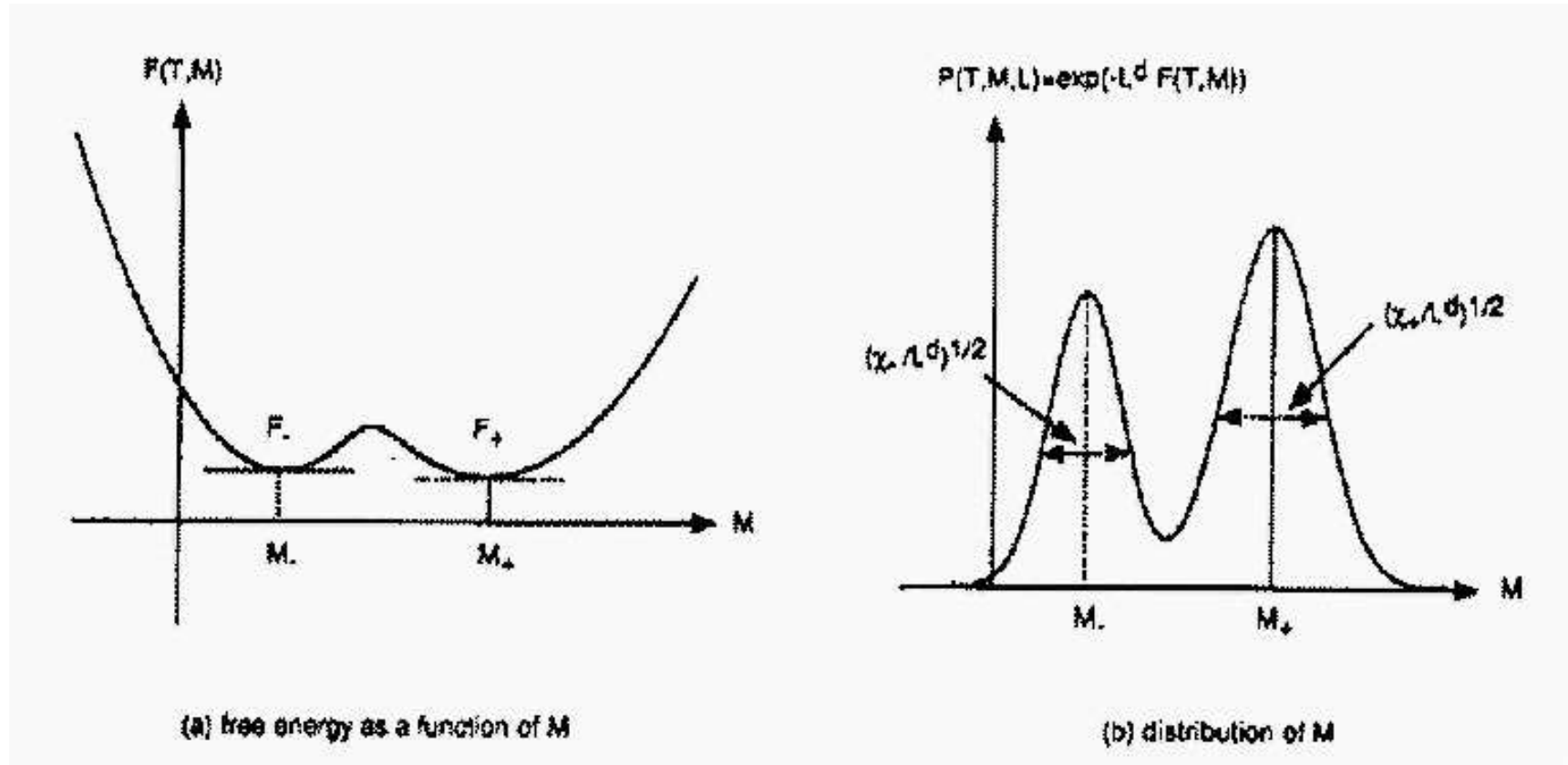
Finite-size scaling for first order transitions

- first order transitions: different footing (Binder 1984)
- for $V = \infty$ the free energy density is $F(T, M)$
for sufficiently large volumes $V = L^d$ the probability
distribution of the magnetization is $P(T, M, L) = \exp[-VF(T, M)]$

average values of \mathcal{O} observables are calculated as usual

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int dM \mathcal{O}(M) P(T, M, L) / \int dM P(T, M, L)$$

- close to a first order transition:
F has two minima as a function of the magnetization $M = M_{\pm}$
the two minima become degenerate at the transition point T_c
the magnetization distribution has a two-peak structure



- quadratically approximating the two minima (Gaussian) free energies and susceptibilities at the minima (F_{\pm}, χ_{\pm})

$$P(T, M, L) \approx \exp[-VF_+(T)] \exp[-V(M - M_+(T))^2/2\chi_+(T)] + \exp[-VF_-(T)] \exp[-V(M - M_-(T))^2/2\chi_-(T)]$$

at the transition $t=(T - T_c)/T_c=0$ the free energies coincide

$$F_{\pm}(T) = F_0 \mp f \cdot t + O(t^2) \qquad M_{\pm}(T) = M_{0\pm} + O(t)$$

$$\chi_{\pm}(T) = \chi_{0\pm} + O(t)$$

- calculate the susceptibility as an observable in this approximation

$$\chi(T, L) = V \sqrt{\chi_{0+}\chi_{0-}}$$

$$\times (M_{0+} - M_{0-})^2 / (\exp(Vft)\sqrt{\chi_{0+}} + \exp(-Vft)\sqrt{\chi_{0-}})^2$$

maximum is obtained for the susceptibility at the point

$$\exp(Vft)\sqrt{\chi_{0+}} = \exp(-Vft)\sqrt{\chi_{0-}}$$

- this condition gives the finite-size scaling for $L \rightarrow \infty$

$$\chi_{max}(L) \rightarrow L^d (M_{0+} - M_{0-})^2 / 4$$

$$T_c(L) - T_c \rightarrow L^{-d} T_c \log(\chi_{0-} / \chi_{0+}) / 4f \quad \delta T_c(L) \rightarrow L^{-d} T_c / f$$

finite-size scaling exponents: geometrically given by dimension
 formal coincidence with the second order exponents:

$$\gamma/\nu = d \quad \alpha/\nu = d \quad 1/\nu = d \quad \Rightarrow y_t = y_h = d$$

in general second order exponents satisfy the bounds:

$$y_t < d \quad y_h < d \Rightarrow \nu/\gamma < d \quad 1/\nu < d$$

for first order transitions the peak of the susceptibility is sharper and narrower than for second order ones

Lee-Yang Zeros of the Partition Function

C.N. Yang and T.D. Lee, Phys. Rev. 87, 404 (1952)

- distinguish between a crossover and a 1^{st} order PT

1^{st} -order PT: free energy $\propto \log Z(\beta)$ non-analytic

PT appears not at finite V , but only at $V \rightarrow \infty$

Z has zeros even at finite V , at complex parameters (β)

$\text{Re}(\beta_0)$, zero with smallest imaginary part: transition point

for 1^{st} -order PT: zeros approach the real axis

$1/V$ scaling in the $V \rightarrow \infty$ limit

generates the non-analyticity of the free energy

crossover: zeros do not approach the real axis

- illustration of Lee-Yang zeros

in $V \rightarrow \infty$ limit the partition function has the form

$$Z = Z_a + Z_b = e^{-V f_a} + e^{-V f_b}$$

free-energy densities coincide at T_c : $f_b = f_a + \alpha(T - T_c) + \dots$

$$Z = 2 \exp[-V(f_a + f_b)(T - T_c)/2] \cosh[-V\alpha(T - T_c)]$$

for complex T values (controlled by β) there are zeros of Z

$$\text{Im}(T_0) = \pi \cdot (n - 1/2)/(V\alpha)$$

with integer numbers of n and $\text{Re}(T) \approx T_c$

$1/V$ scaling expected $V \rightarrow \infty$ limit (α depends on V)

for rapid cross-over (no phase transition scenario)

finite value is obtained in the $V \rightarrow \infty$ limit

A véges méret skálázás analízis eredmények igazolták, hogy SU(3) esetén elsőrendű, SU(2) esetén másodrendű a fázisátalakulás.

	SU(3)	Z(3) Potts	SU(2)	Z(2) Ising
γ/ν	3.02(14)	2.9(3)	1.93(3)	1.98(2)
$1/\nu$	2.95(12)	3.21(12)	1.54(9)	1.59(1)
β/ν	–	–	0.545(30)	0.516(5)
α/ν	–	3.12(15)	–	–

A teljes QCD-ben a $Z(N)$ szimmetria sérül, u.i. az antiperiodikus határfeltétel miatt a link faktora nem olvasztható bele a kvark terekbe.

$SU(3)$ esetén nem lesz fázisátmenet elegendően könnyű kvarkokra.

Viszont van királis fázisátmenet. A királis szimmetria $T=0$ esetén sérül, nagy T -n helyreáll.

Effektív szigma modell analízis

Az effektív mezon tér: $M_{ij} = \langle \bar{q}_{Li} q_{Rj} \rangle$.

A királis transzformációra:

$$M \rightarrow V^\dagger M U.$$

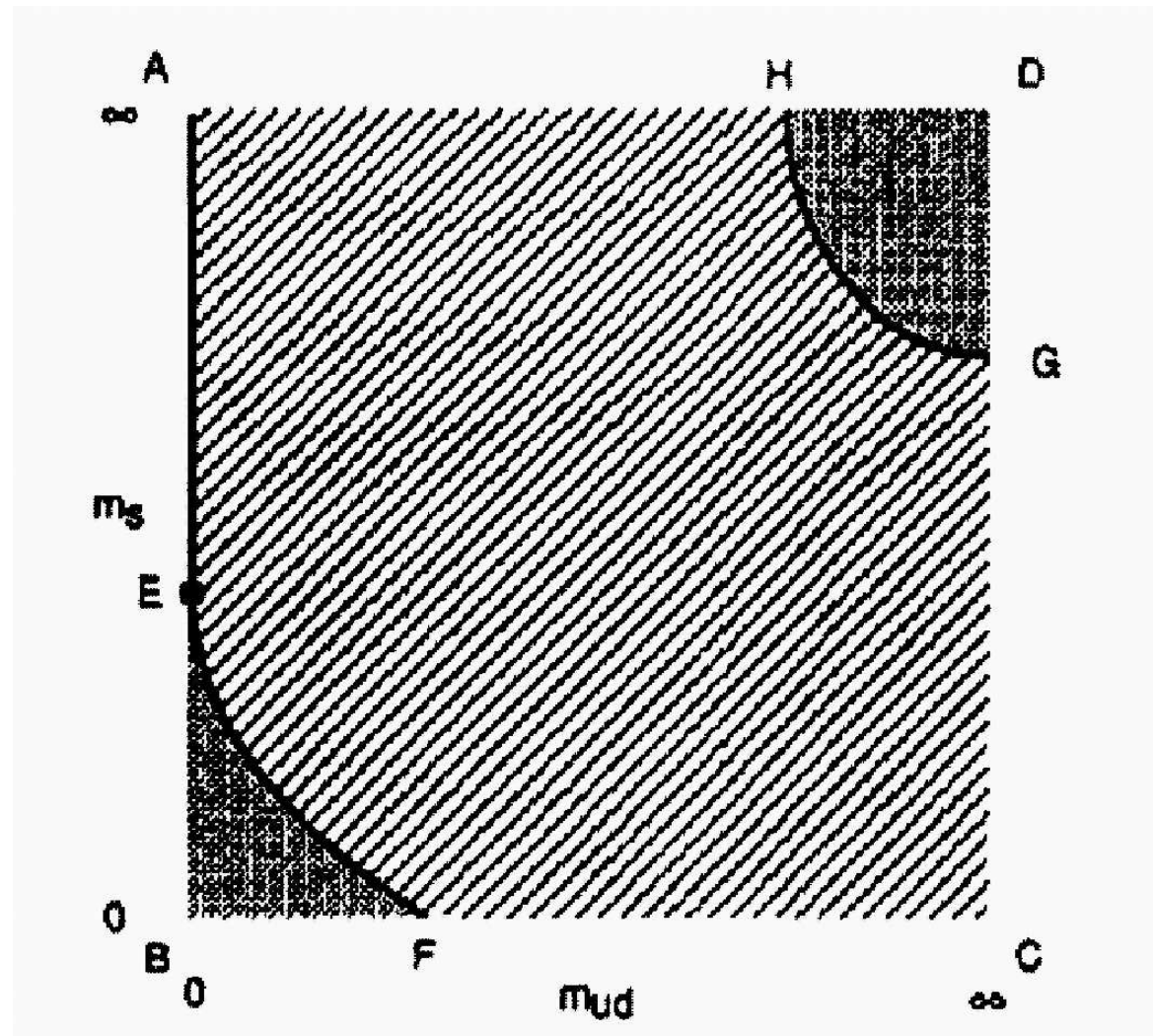
Az effektív hatás:

$$\mathcal{L} = \text{tr}(\partial_\mu M^\dagger \partial M) + m_0^2 \text{tr}(M^\dagger M) + \pi^2 g_1 / 3 (\text{tr}(M^\dagger M))^2 + \pi^2 g_2 / 3 (\text{tr}(M^\dagger M))^2.$$

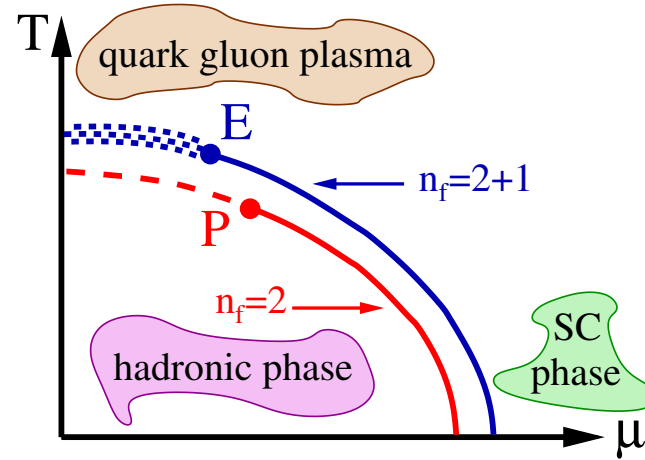
Ha $m_0^2 < 0$ van szimmetria sértés, és a vektor rész megmarad.

QCD fázis diagramok a $m_{ud} - m_s$ síkon

szigorú és kevésbé szigorú rács és effektív modelles vizsgálatok szerint:



QCD fázis diagram a $\mu - T$ síkon



• Királis fázisátmenet (PT)

$n_f = 2$ és $m_q = 0$ $\mu = 0 \Rightarrow$ 2. rendű PT

$n_f = 2$ és $m_q = 0$ $T = 0 \Rightarrow$ 1. rendű PT

$n_f = 2$ és $m_q = 0 \Rightarrow$ trikritikus pont (P) $\mu, T \neq 0$

$n_f = 3$ és $m_q = 0$ $\mu = 0 \Rightarrow$ 1. rendű PT

ha m_s nő, az 1. rendű PT gyengül \Rightarrow cross-over

$n_f = 2 + 1$ és fizikai m_q $\mu = 0 \Rightarrow$ cross-over

$n_f = 2 + 1$ és fizikai m_q $T = 0 \Rightarrow$ 1. rendű PT

$n_f = 2 + 1$ és fizikai $m_q \Rightarrow$ kritikus végpont (E) $\mu, T \neq 0$

Chemical Potential on the Lattice

P. Hasenfratz and F. Karsch, Phys. Lett. B125, 308 (1983)

J. Kogut et al., Nucl. Phys. B225, 93 (1983)

- naive generalization of the free continuum prescription (including a $\mu a \bar{\psi} \gamma_4 \psi$ term)

energy density quadratically divergent

- observation: the chemical potential acts like the fourth component of an imaginary, constant vector potential

⇒ essentially unique solution:

multiply the timelike links by $\exp(\pm \mu a)$

BUT!

det M becomes complex. Standard importance sampling does not work if $\text{Re}(\mu) > 0$.

Earlier lattice results for finite chemical potential

- Glasgow method

I.M. Barbour, Nucl. Phys. A642, 251 (1998)

create an ensemble at $\mu = 0$ (importance sampling) and reweight the fermion determinant at $\mu \neq 0$ by its value at $\mu = 0$

⇒ **overlap problem**: the ensemble created at $\mu = 0$ has a bad overlap with the true ensemble at $\mu \neq 0$ (our main interest)

more than 20 million independent configurations on $V = 2^4, 4^4$
the overlap problem for $SU(3)$ is severe, unphysical results
premature onset transition at $\mu_c \approx m_\pi/2$

- Random matrix model for the Dirac operator

M.A. Halasz et al., Phys. Rev. D58, 096007 (1998)

crude estimate, prediction can be off by a factor of 2-3

⇒ $T_E \approx 120$ MeV and $\mu_E \approx 700$ MeV

The Overlap Improving Multi-parameter Reweighting

Z. Fodor, S.D.Katz Phys. Lett. B 534 (2002) 87

- generic system with ψ fermions and ϕ bosons

fermionic Lagrangian: $\bar{\psi}M(\phi)\psi \Rightarrow$ after Grassmann integration

$$Z(\alpha) = \int \mathcal{D}\phi \exp[-S_{bos}(\alpha, \phi)] \det M(\phi, \alpha)$$

α : parameter set (gauge coupling, mass, chemical potential)

include μ : forward/backward links multiplied with $\exp(\pm\mu)$

for some parameters α_0 importance sampling can be done

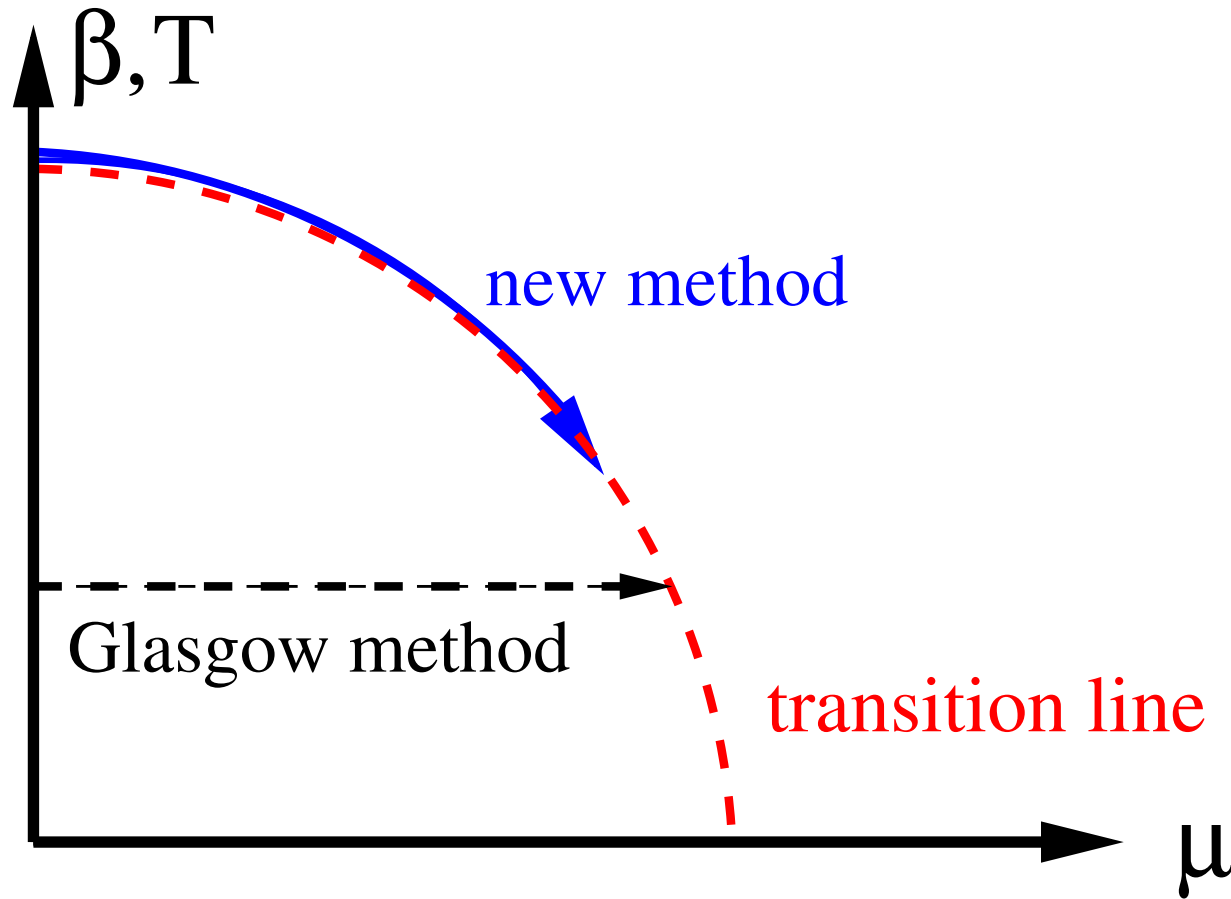
$$Z(\alpha) = \int \mathcal{D}\phi \exp[-S_{bos}(\alpha_0, \phi)] \det M(\phi, \alpha_0) \{ \exp[-S_{bos}(\alpha, \phi) + S_{bos}(\alpha_0, \phi)] \det M(\phi, \alpha) / \det M(\phi, \alpha_0) \}$$

first line: measure; curly bracket: observable (will be measured)

simultaneously changing several parameters: better overlap

e.g. transition configurations are mapped to transition ones

Comparison with the Glasgow Method



Glasgow

single parameter (μ)
purely hadronic
configurations

New method

two parameters (μ and β)
transition configurations