Bevezetés a rácstérelméletbe

Katz Sándor
Elméleti Fizikai Tanszék

1. Motiváció

2. Pályaintegrál, euklideszi térelméletek

3. Skalár elmélet: kontinuum-limesz, renormálási csoport

4. Mértékelméletek

5. Fermionok

Motiváció I.

Perturbációszámítás:

- gyenge csatolás esetén használható
  - pl. elektrogyenge elmélet vagy QCD nagy energián
- szórási folyamatok hatáskereszmetszete

Erős kölcsönhatás kis energián

- hadron tömegek
- hadronikus mátrixelemek
  - perturbációszámítás nem alkalmazható

Véges hőmérsékletű térelmélet, fázisátmenetek

- perturbációszámítás problematikus

$\longrightarrow$ nemperturbatív módszerek szükségesek

Rácstérelmélet

- legszisztematikusabb nemperturbatív "módszer"

Motiváció II.

Kvantumtérelméletek (QFT) definíciója

végtelen sok szabadsági fokú kvantummechanikai rendszer

perturbatív definíció rendről rendre halad

DE, a perturbatív sor nem konvergens

magasabb rendekben divergenciák

$\longrightarrow$ nemperturbatív definíció szükségessége

Rácstérelmélet

rácsregularizáció:

véges rácsállandó, terek csak a rácspontokban

(gyakorlatban általában véges V is)

$\longrightarrow$ megszámlálható (véges) szabadsági fokú kvantummechanika

a kontinuum elmélet kontinuum limesszel definiálható (ha létezik)

Pályaintegrál (funkcionálintegrál) kvantummechanikában

Annak amplitudója, hogy egy részecske t idő alatt x-ből y-ba jut:

$$< y|\exp(-iHt)|x >= \text{const} \cdot \lim_{N\to\infty} \int dx_1 dx_2 \ldots dx_{N-1} \exp(iS_\varepsilon),$$

ahol $\varepsilon = t/N$ és

$$S_\varepsilon = \frac{m}{2\varepsilon}\left((x_1 - x)^2 + (x_2 - x_1)^2 \ldots (y - x_{N-1})^2\right) - \left(\frac{1}{2}V(x) + V(x_1) + \cdots + V(x_{N-1}) + \frac{1}{2}V(y)\right)$$

a klasszikus hatás közelítése.

Szemléletesen

minden x-ből y-ba menő pályára integrálni kell

tömören írva:

$$< y|\exp(-iHt)|x >= \int_{x\to y} Dx \ \exp(iS)$$

A fenti limesz létezése az oszcilláló integrandus miatt kérdéses

Euklideszi idő: $t=-i\tau$:

$$<y|\exp(-H\tau)|x>=\int_{x\to y} Dx\ \ \exp(-S_E),$$

ahol $S_E=-iS(-i\tau)$ az euklideszi hatás.

Legyen $x=y$ és összegezzünk rá:

$$\mathrm{Tr}\ \ \exp(-H\tau)=\int_{per.\ \ p.} Dx\ \ \exp(-S_E),$$

$\tau=\beta$ azonosítás: állapotösszeg.

Operátorok vákuum várhatóértéke ($<0|A|0>$):

$T\to 0(\tau\to\infty)$ várható érték:

$$<0|A|0>=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathrm{Tr}\ \ A\exp(-H\tau)}{\mathrm{Tr}\ \ \exp(-H\tau)}$$

Korrelációs függvények: $A=x(\tau_1)x(\tau_2)\ldots x(\tau_k)$:

$$\mathrm{Tr}\ \ A\exp(-H\tau)=\int_{per.\ \ p.} Dx\ \ x(\tau_1)x(\tau_2)\ldots x(\tau_k)\exp(-S_E)$$

Euklideszi kvatumtérelmélet

Térelmélet:

pontszerű részecske koordinátái $\longrightarrow$ mezők

$\int$ pályákra $\longrightarrow$ $\int$ mezőkonfigurációkra

Funkcionálintegrál

az értelmezéshez az idő mellet a teret is diszkretizálni kell

$\longrightarrow$ rácsregularizáció

A fluktuációk elkerülésére: euklideszi idő

Euklideszi térelmélet

formálisan lehet $t = -i\tau$-t használni, de végül mindig a valós t érdekel

$\longrightarrow$ analiticitás fontos

korrelációs függvények analitikus tulajdonságai nem triválisak

Euklideszi korr. függvények (Schwinger fv.-ek) szimmetrikusak

-formálisan azért, mert euklideszi pontok mindig térszerűen szeparáltak

Wick forgatás: Schwinger fv. $\longrightarrow$ (időrendezett) Green-fv.

Euklideszi funkcionálintegrál térelméletben:

Rácsregularizáció

Λ rács, véges a rácsállandó

mezőket csak a rácspontokon értelmezzük

deriváltak $\longrightarrow$ differencia hányadosok:

$$\Delta_\mu^f \Phi(x) = \frac{1}{a}(\Phi(x+a\hat{\mu}) - \Phi(x))$$

euklideszi hatás $\longrightarrow$ rács hatás (továbbiakban S)

Kvantummechanikához hasonlóan:

$$Z = \mathrm{Tr}\ \exp(-H\tau) = \int_{\Phi(\tau)=\Phi(0)} \prod_{x\in\Lambda} dx\ \exp(-S[\Phi])) = \int [D\Phi] \exp(-S[\Phi]),$$

illetve

$$< \Phi(x_1)\Phi(x_2)\ldots\Phi(x_k) > = \frac{1}{Z}\int [D\Phi]\Phi(x_1)\Phi(x_2)\ldots\Phi(x_k)\exp(-S[\Phi]).$$

Analógiák:

1. 3D kvantumos statisztikus fizikai rendszer:
   $kT = 1/\tau$ inverz rácsméret az euklideszi idő irányban
2. 4D klasszikus statisztikus fizikai rendszer: S az energiafunkcionál

Skalár elmélet (Pl. Standard Modell Higgs szektor):

Rács hatás

$$S=\frac{1}{2}\sum_x a^4\left\{\Delta^f_\mu\Phi_0(x)\Delta^f_\mu\Phi_0(x)+m_0^2\Phi_0(x)^2\right\}+\frac{g_0}{4!}\sum_x a^4\Phi_0(x)^4$$

dimenziótlan paraméterekkel:

$$S=\sum_x\left\{-2\kappa\sum_{\mu=1}^{4}\Phi(x)\Phi(x+a\hat{\mu})+\Phi(x)^2+\lambda[\Phi(x)^2-1)^2-\lambda\right\}$$

$\lambda\rightarrow\infty$ limesz:Ising modell

Korrelációs függvény

$$<0|\Phi(0)\Phi(\tau)|0>=\sum_n|<0|\Phi(0)|n>|^2\cdot e^{-(E_n-E_0)|\tau|}$$

$\tau\rightarrow\infty$: korrelációs hossz rácsegységben:

$$\xi\propto\frac{1}{ma}$$

Kontinuum limesz

A kontinuum elmélet az $a \longrightarrow 0$ limesz, miközben
a nagytávolságú fizika (pl. m) nem változik.

$\xi \longrightarrow \infty$: kritikus viselkedés

Fizika állandósága nagy távolságokon $\longrightarrow$ fixpont

A kontinuum limesz a 4D statisztikus fizikai rendszer fixpontja

Univerzalitás

A nagy távolságú fizika csak néhány releváns operátortól és a fixponttól függ

Perturbációszámítás:

g=0 (Gauss fixpont) körül a skalár elméletben

csak 2 releváns operátor van ($\Phi(x)^2, \Phi(x)$)

$\Phi(x)^4$ marginális, de a csatolása csökken: a kont. limesz triviális

Lüscher-Weisz megoldás: nincs más fixpont
Ettől még nagy tartományban használható effektív kölcsönható elméletként

Renormálási csoport(ok)

Kadanoff-Wilson renormálási csoport

Blokkosítás: rácsállandó növelése

elvileg ez megadja azt a hatást, amely véges rácsállandón is egzakt fixpont hatás (pl. Hasenfratz, Niedermayer a QCD-ben)

rácstérelméletben használatos renormálási csoport

ellenkező irány

miközben a csökken, nem akarjuk a teljes fizikát konstanson tartani

csak véges számú mennyiséget (pl. m_R, g_R, Φ normálása)

a hatás alakja nem változik (nincsenek új csatolások)

minden más mennyiségnek konvergálni kell az $a \to 0$ limeszben

Ha ez megy véges sok mennyiség fixen tartásával

$\to$ az elmélet renormálható, a kontinuum limesz létezik

Mértékelméletek

Legyen egy belső szimmetriánk:
$\Phi(x) \to \Lambda^{-1}\Phi(x),$ ahol $\Lambda \in G$
A hatás legyen erre invariáns.
Ha Λ x függő: kölcsönhatások ($\Phi(x)\Phi(x+a\mu)$) nem invariánsak
- kelll egy új tér $U(x)_\mu$, mely összeköti a szomszédokat.
Ha $U(x)_\mu \to \Lambda(x)^{-1}U(x)_\mu\Lambda(x+a\mu),$
akkor a $\Phi(x)U(x)_\mu\Phi(x+a\mu)$ kombináció invariáns

Hatás

ugyanaz, mint korábban, de a κ-s Hopping tagot erre kell cserélni
+ mértékhatás: Plakett (a magasabb hurkok irrelevánsak)

Pl. Ha $G = U(1)$: elektrodinamika
Ha $G = SU(N)$: nemábeli mértékelméletek

Funkcionálintegrál

$\int dU$: Haar-mérték

Fermionok

Pauli elv:

a fermionok antikommutáló $\Psi, \bar{\Psi}$ terekkel írhatók le

Grassmann változók

$$\{\Psi(x), \Psi(y)\} = \{\bar{\Psi}(x), \Psi(y)\} = \{\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)\} = 0$$

funkcionálintegrál csak formálisan

szabályok:

$\int d\Psi(x) = 0$, $\int \Psi(x) \; d\Psi(x) = 1$

A hatásban csak $\bar{\Psi}(x)\Psi(y)$ alakú tagok vannak

kevesebb Ψ csak külső forrás esetén

több Ψ: irreleváns

$$S_f = \sum_{x,y} \bar{\Psi}(x) M_{xy} \Psi(y)$$

A fermionikus integrál elvégezhető:

$$\int [D\bar{\Psi} D\Psi] \exp(-\sum_{x,y} \bar{\Psi}(x) M_{xy} \Psi(y)) = \det M$$

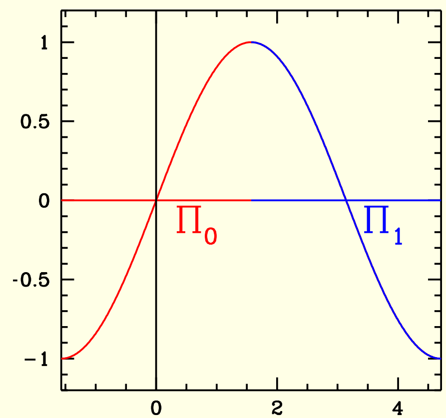
Fermion duplázódás

Naiv diszkretizáció:

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu \partial_\mu \Psi \quad \rightarrow \quad \bar{\Psi}\gamma_\mu \Delta_\mu \Psi$$

Probléma:

2 pont függvény (propagátor) inverze impulzus térben lineáris diszkretizáció után:



2 zérushely $\rightarrow$ propagátornak 2 pólusa van $\rightarrow$ 2 részecske

4D: 16 részecske!

Megoldás:

más alakú hatás; több lehetőség (Wilson, staggered)

Rács QCD

SU(3) mértékelmélet $N_f = 2+1$ kvarkkal a fundamentális ábrázolásban

Hatás (Wilson fermionokkal)

$$S_g = \beta \sum_p (1 - \frac{1}{3}\mathrm{ReTr}U_p)$$

$$S_f(1 \ \ \mathrm{kvarkra}) = \sum_x \left\{ \bar{\Psi}(x)\Psi(x) - K \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \bar{\Psi}(x)(1+\gamma_\mu)U(x)_\mu \Psi(x+a\mu) \right\}$$

Paraméterek:

csatolás $(\beta = 6/g^2)$

tömegek $(K\mathrm{-ban})$

Kontinuum limesz

aszimptotikus szabadság:

a Gauss fixpont nem triviális elméletet ad

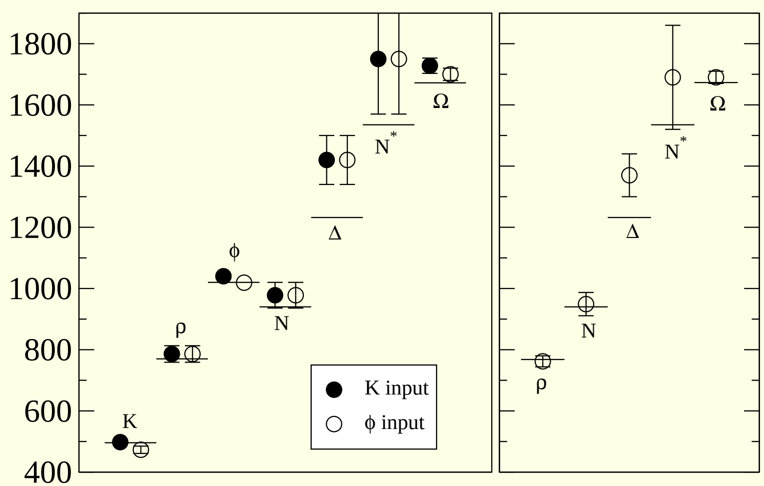
Valóban az erős kölcsönhatást irja le a QCD?

Hadron spektrum

Quenched közelítés:

a fermionokból jövő $\det M$-et elhanyagoljuk
a szimulációk gyorsítása érdekében

QCD Lagrange-függvényből (kvarkok+gluonok) kiindulva
se több – se kevesebb mint a kísérleti spektrum
kvantitatív egyezés százalék pontossággal
már a ”quenched” közelítésben is



Hasenfratz, Juge, Niedermayer, 2004

Összefoglalás

1. A rácsregularizáció a térelméletek lehetséges "definiálását" adja

2. A regularizált elmélet analóg egy 4D statisztikus fizikai modellel

3. A kontinuum limesz ezen modell egyik fixpontjának felel meg

4. Az univerzalitás erősen leszűkíti a lehetséges kölcsönhatásokat. A szimmetriák és a fixpont megadása után egyértelmű az elmélet

5. Rács QCD: lokális SU(3) szimmetria + feles spinű fermionok a fundamentális ábrázolásban

6. jó egyezés a kísérleti adatokkal (nagy energián is; pert. számítás): jó eséllyel a QCD az erős kölcsönhatás helyes elmélete.