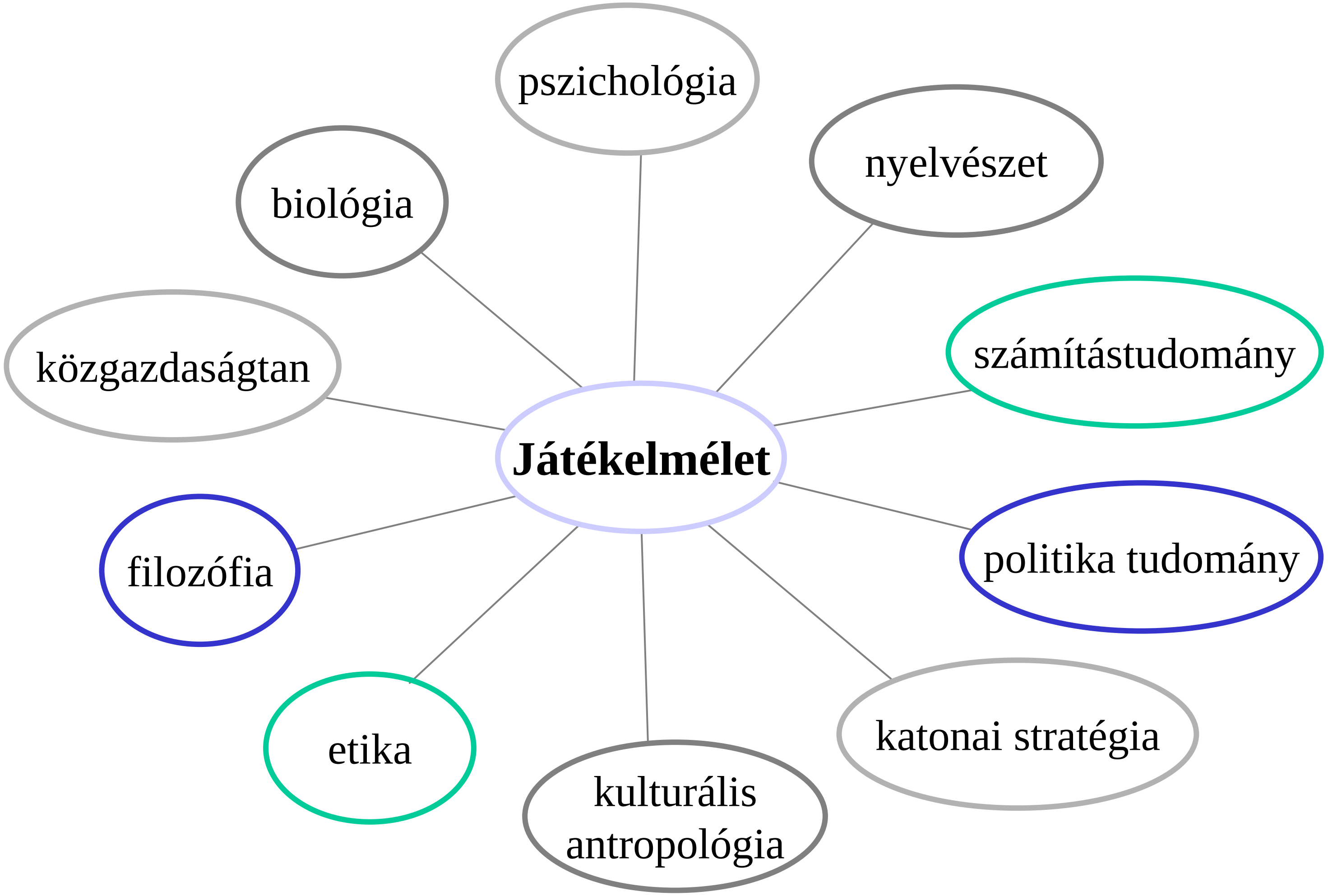
Játékelméleti alapvetés - I

Fáth Gábor

(SZFKI)

ELTE – 2005. június 1.

Alkalmazások



Definíció

Játékelmélet:

Függetlenül optimalizáló ágensek viselkedését leíró tudomány.

Összehasonlítás

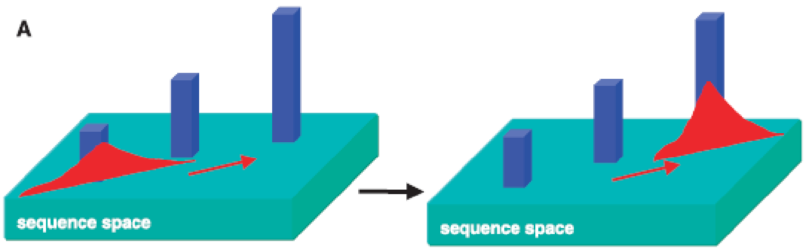
- Fizika

- Játékelmélet

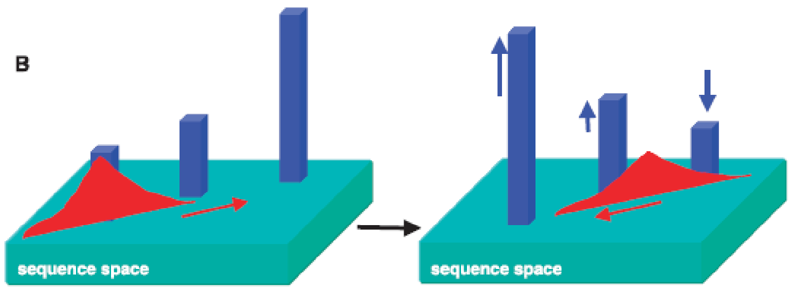
Kölcsönható részecskék
Egy optimalizálandó függvény
Rögzített sokdimenziós terepasztal
Extrémum feltétel

Kölcsönható ágensek
Sok optimalizálandó függvény
Változó sokdimenziós terepasztal
Nash egyensúly

(de: vannak potenciálos játékok!)

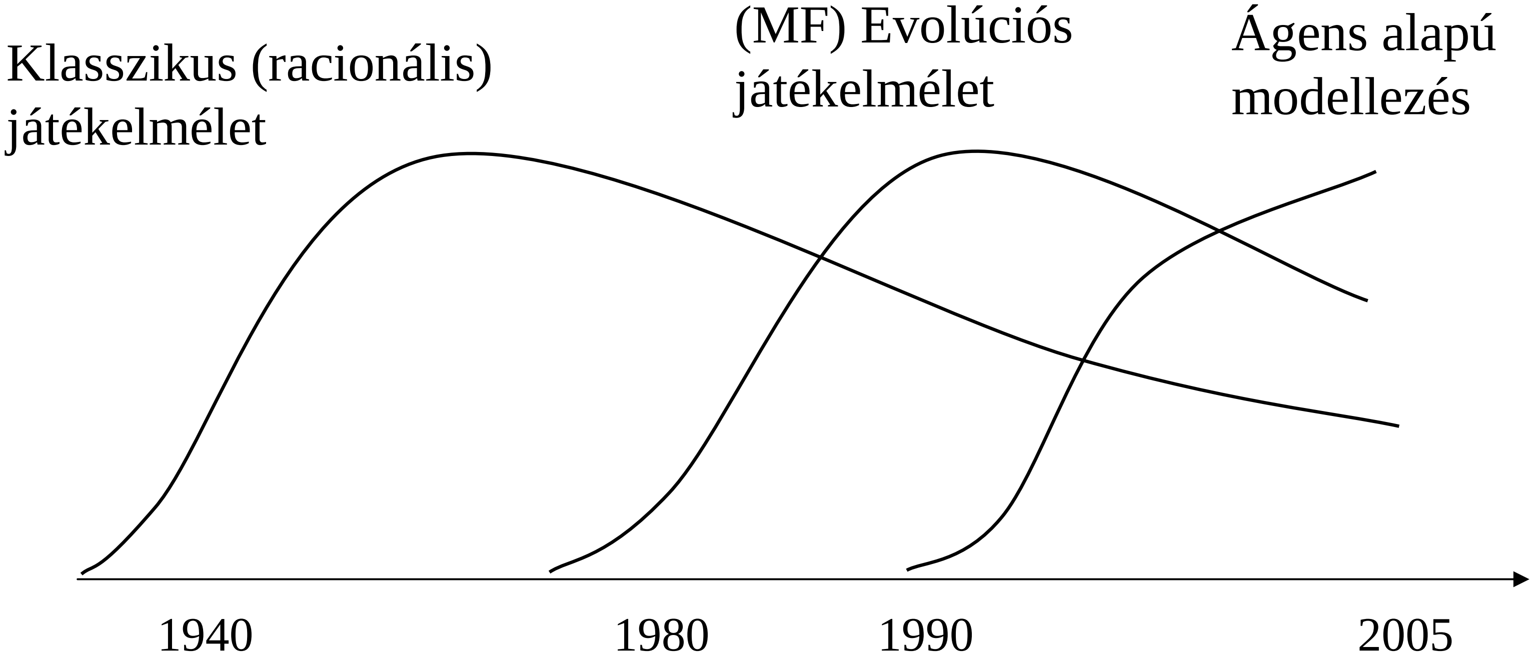


The population adapts on a constant fitness landscape.

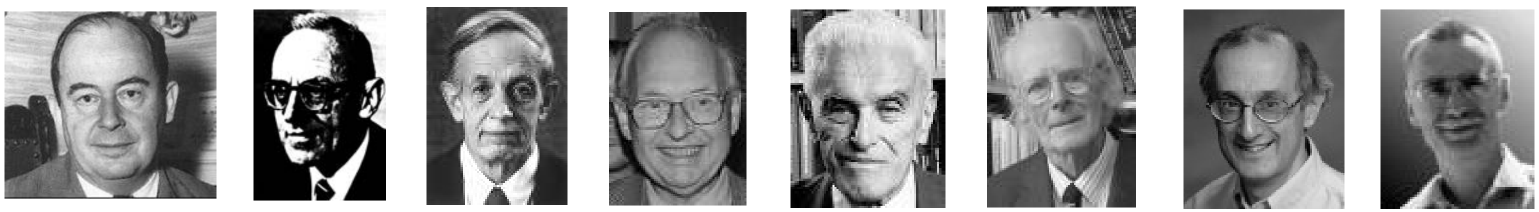


The population changes the fitness landscape as it moves across.

Tudománytörténet



Neumann-Morgenstern, **Nash**, Shapley, **Selten**, **Harsányi**, Kreps, Wilson, Mertens, Fudenberg, Tirole, …
Maynard-Smith, Axelrod, Weibull, Sigmund, Hofbauer, Cressman, …
Mowak, May, Szabó Gy., …



Fogolydilemma

		Piros fogoly	
		kooperál	*árulkodik*
Kék fogoly	*kooperál*	-1, -1	-9, 0
	árulkodik	0, -9	-6, -6

A játékosok tökéletesen racionálisak!

Játékelmélet jóslata: (*árulkodik*, *árulkodik*)

Pareto hatékony kimenet: (*kooperál*, *kooperál*)

$-6+(-6) < -1+(-1)$ **Társadalmi csapda**

Koordinációs játék („Nemek harca”)

		Laci	
		Opera	*Foci*
Kati	*Opera*	2, 1	0, 0
	Foci	0, 0	1, 2

nyeremény
(bi)mátrix

Játékelmélet jóslata: (*Opera*, *Opera*)
(*Foci*, *Foci*)
(p=2/3, q=1/3) kevert stratégia

Héja-Galamb játék

		Piros játékos	
		Héja	*Galamb*
Kék játékos	*Héja*	-1, -1	10, 0
	Galamb	0, 10	5, 5

Játékelmélet jóslata: (*Héja*, *Galamb*)
(*Galamb*, *Héja*)
(p=5/6, q=1/6) kevert stratégia

Nash egyensúly

(s_1^*, s_2^*) *Nash egyensúly*

$$\Updownarrow$$

$$\forall s_1 \quad u_1(s_1, s_2^*) \le u_1(s_1^*, s_2^*)$$
$$\forall s_2 \quad u_2(s_1^*, s_2) \le u_2(s_1^*, s_2^*)$$

Egyetlen játékosnak sem érdeke egyoldalúan eltérni.

Kollektív deviációkkal szembeni stabilitásról nem mond semmit!

Nash tétel: $\exists$ NE, ha …

Általában a probléma éppen az, hogy több egyensúly is van!
(Mi az egyensúly-szelekció mechanizmusa?)

Osztályozás

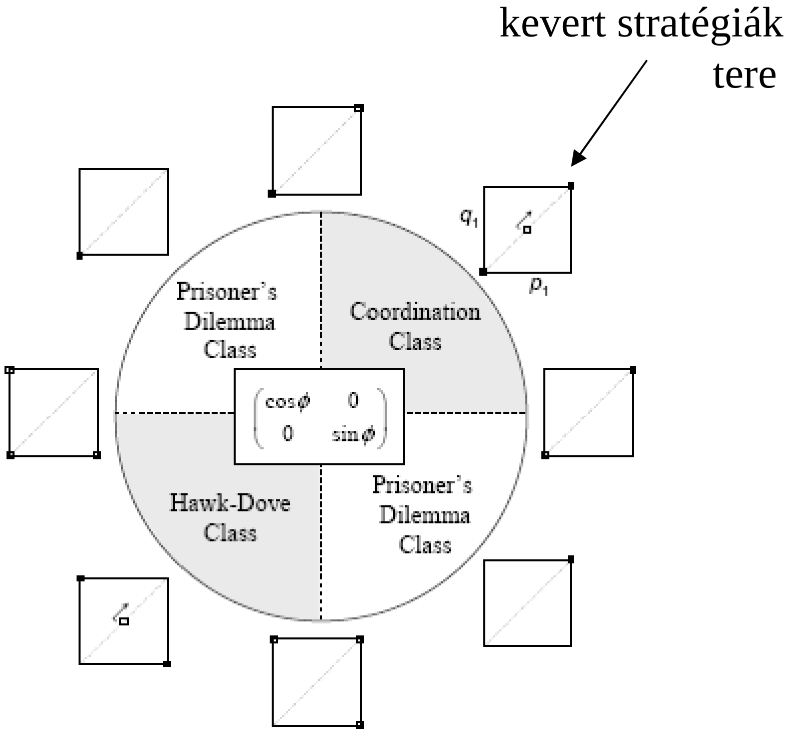
Teljes információs, statikus pl.: *Fogolydilemma, Cournot j.,* *Kő-Papír-Olló* Megoldási koncepció: Nash egyensúly	**Nem teljes információs, statikus** pl.: *Aukció* MK: Bayes-i Nash egyensúly
Teljes információs, dinamikus pl.: *Ultimátum j.,* *iterált statikus játékok, sakk* MK: Részjátékban is tökéletes NE	**Nem teljes információs, dinamikus** pl.: *kommunikációs játékok* *(„Signaling”, „Cheap talk”)* MK: Tökéletes Bayes-i NE Szekvenciális egyensúly

2x2-es szimmetrikus játékok

nyeremény (bi)mátrix:

$$\left(A, A^{T}\right) = \begin{pmatrix} a, a & b, c \\ c, b & d, d \end{pmatrix}$$

$$\tan\phi = \frac{d-b}{a-c}$$



- Koordináció: *2 tiszta NE, 1 kevert NE*
- Héja-Galamb: *2 tiszta NE, 1 kevert NE*
- Fogolydilemma: *1 tiszta NE*

Iterált játékok

Alapjáték: pl. Fogolydilemma

Fő kérdés: **Kialakulhat-e kooperáció?**

A teljes sorozat egyszerre vizsgálandó (fenyegetés, jutalom, reputáció)

„szuperjáték”

Stratégia:

Részletes akcióterv minden lehetséges szituációra.

(improvizálás nem megengedett!)

stratégia = algoritmus

pl.: „Szemet-szemért”, „Örök harag”

Iterált játékok 2.

Véges ismétlésszám

nyeremény: $U = \sum_{t=1}^{T} u_t$

Játékelm. jóslata: **nincs kooperáció**

(megoldás visszafelé)

Paradoxon:
Kooperáció létezése kísérleti tény!

Végtelen ismétlésszám

nyeremény: $U = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_t$

diszkontálás (kamat, folytatás valósz.)

Jóslat: **van (lehet) kooperáció**

„Folk theorem”: Ha δ elég nagy, akkor elérhető a Pareto hatékonyság

(fenyegetés szerepe!)

- Játék nem Iterált FD
  (ld. Kreps et al. 1982 – reputációs egyensúly)
- Korlátozott racionalitás

Korlátozott racionalitás

Miért?

Kognitív korlátok, tanulási idő, információ költsége,…

Hogyan?

Dedukció helyett indukció (próba-szerencse)

Heurisztikák, társadalmi normák

Adaptív tanulás

Leírás módja?

Viselkedési szabályok mikroszinten

Dinamika mikro- és makroszinten

Evolúciós játékelmélet

- Iterált játékok
- Az ágensek stratégiái menet közben változnak
- Stratégiaváltás dinamikus szabályai
- Tipikusan a jövő erős diszkontálása (miópia)
- Tipikusan véges memória

Biológia: Stratégiák genetikusan rögzítettek
nagyobb nyeremény ⟶ nagyobb szaporodási ráta
zaj: mutáció

Közgazdaságtan: Stratégiaváltás generáción belül (imitáció, tanulás)
zaj: kísérletezgetés, hiba

Játékelméleti alapvetés - II

Fáth Gábor

(SZFKI)

ELTE – 2005. június 8.

Ismétlés

Játék: szimmetrikus/aszimmetrikus, statikus/dinamikus,

teljes/nem-teljes információs

Stratégiák: diszkrét/folytonos, tiszta/kevert, algoritmus

Racionalitás: teljes/korlátozott

Megoldási koncepció: Nash egyensúly/finomítások

2x2-es mátrixjátékok osztályozása:

Fogolydilemma, Koordináció, Héja-Galamb

Társadalmi csapda: egyéni érdek/közösségi érdek

Iterált játékok: Racionális-e kooperálni?

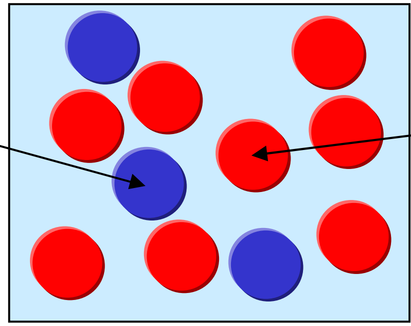
Korlátozott racionalitás, dinamikus adaptáció, tanulás

Mikro-dinamika (1)

1, Moran folyamat (biológia): Fitnesz-arányos replikáció

(fitnesz ~ nyeremény)

Pusztulásra ítélt
P = 1/N



Replikációra
kiválasztott
P ~ fitnesz

Markov folyamat gyakoriságfüggő átmeneti valószínűségekkel:

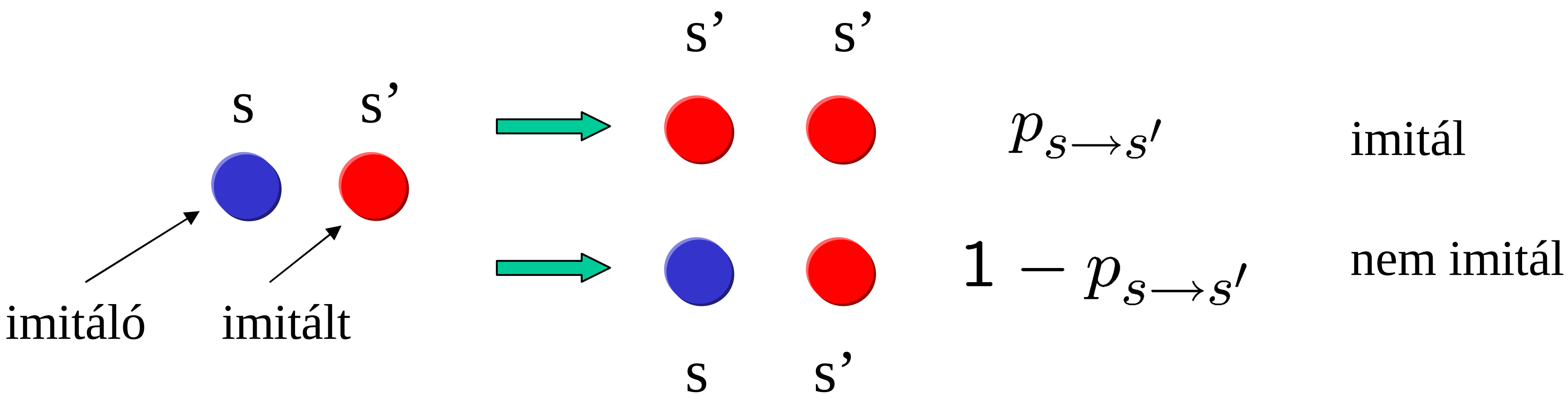
$$W_{n_A \to n_A+1} = \frac{n_A f_A(n_A, n_B)}{n_A f_A(n_A, n_B) + n_B f_B(n_A, n_B)} \frac{n_B}{N}$$

$$W_{n_A \to n_A-1} = \frac{n_B f_B(n_A, n_B)}{n_A f_A(n_A, n_B) + n_B f_B(n_A, n_B)} \frac{n_A}{N}$$

$$W_{n_A \to n_A} = 1 - W_{n_A \to n_A+1} - W_{n_A \to n_A-1}$$

Mikro-dinamika (2)

2, Imitáció (biológia/társadalomtudományok): Nyeremény-függő imitáció



$$p_{s \to s'} = \begin{cases} 1 & \text{if } u_{s'} > u_s \\ 0 & \text{if } u_{s'} < u_s \end{cases}$$

„Másold a jobbat!”

$$p_{s \to s'} = \text{const} \cdot \max(u_{s'} - u_s, 0)$$

„Arányos imitáció” (Schlag 1998)

$$p_{s \to s'} = \frac{\exp([u_{s'} - u_s]/T)}{1 + \exp([u_{s'} - u_s]/T)}$$

„zajos imitáció”

Mikro-dinamika (3)

3, Jobb/Legjobb válasz dinamikák (társadalomtudományok):

$$s_i(t+1) = BR[s_{-i}(t)]$$

„Legjobb válasz”

$$s_i(t+1) = BR[s_{-i}(t); s_{-i}(t-1); \ldots; s_{-i}(1)]$$

„Fictitious play” (Brown 1950)

$$s_i(t+1) = s_i(t) + \nu \frac{\partial u_i(s_i; s_{-i}(t))}{\partial s_i}$$

„Gradiens dinamika”

Dinamikák osztályozása:

- Szinkron/aszinkron
- Innovatív/nem-innovatív
- Nyeremény szerint monoton/nem monoton

Populációs játékok

- Végtelen nagy populáció
- Homogén ágensek
- Véletlen párosítás
- Stratégia-revízió ritka
- Azonos mikro-dinamika
- ~Nincs kevert stratégia

Átlagtér elmélet !

Makro-paraméterek: stratégiák relatív gyakorisága: $x_1, x_2, \ldots, x_Q$

$$\sum_{i=1}^{Q} x_i = 1$$ fázistér Q-1 dimenziós

Determinisztikus vagy sztochasztikus mikro-dinamika

Elsőrendű nemlineáris ODE makro-dinamika

Makro-dinamika

Konfiguráció: $\boldsymbol{n}=\{n_1, n_2, \ldots, n_Q\}$

Mikroszinten **Master egyenlet**:

$$\frac{dP(\boldsymbol{n},t)}{dt} = \sum_{\boldsymbol{n}'} \left[P(\boldsymbol{n}',t) W(\boldsymbol{n}' \to \boldsymbol{n}) - P(\boldsymbol{n},t) W(\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n}') \right]$$

$$W(\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n}') = n_i n_j \frac{\nu}{N} \mathsf{max}(u_i - u_j, 0) \delta_{\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}_{ij}}$$ „arányos imitáció”

$$x_s = \frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{n}} n_s P(\boldsymbol{n}, t)$$ átlagos stratégia gyakoriság

Makroszinten (kis közelítéssel):

$$\dot{x}_s = \nu x_s [u_s(\boldsymbol{x}) - \sum_j x_j u_j(\boldsymbol{x})]$$ **replikátor egyenlet**

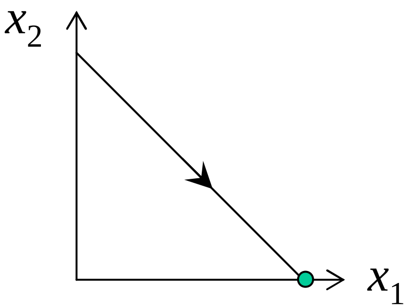
- Korrekciók számolhatók !
- Más mikro-dinamikák más makro-dinamikához vezetnek…

Replikátor dinamika

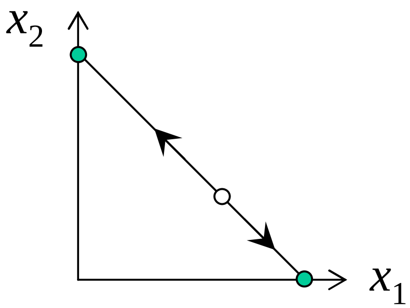
$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \textsf{fitness of } i\textsf{-strategists} - \textsf{average fitness}$$

$$\dot{x}_i = x_i[(\boldsymbol{Ax})_i - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{Ax}]$$

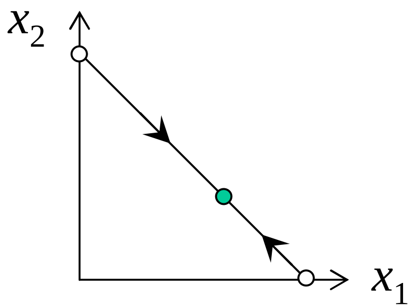
2x2-es szimmetrikus populációs játékok dinamikus osztályozása:



Fogolydilemma



Koordináció



Héja-Galamb

Evolúciós stabilitás

Statikus koncepció: ESS (evolúciósan stabil stratégia)

Maynard-Smith (1974)

Egy stratégia ESS ha képes ellenállni minden mutáns stratégia támadásának

Általában létezik egy inváziós határ

Feltétel:

(1) *NE feltétel:*

$$\boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^* \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^* \quad \text{for all } \boldsymbol{p} \in \Delta_N, \qquad (1)$$

(2) *stabilitási feltétel:*

$$\begin{aligned} &\text{if } \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{p}^* \text{ and } \boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^*, \\ &\text{then } \boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} > \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}, \qquad (2) \end{aligned}$$

A természetben megfigyelhető stratégiák tipikusan ESS-ek.

(egyensúly szelekció!)

Statika vs dinamika

Mi a kapcsolat a NE és dinamikus attraktorok között?

„Folk” tétel:

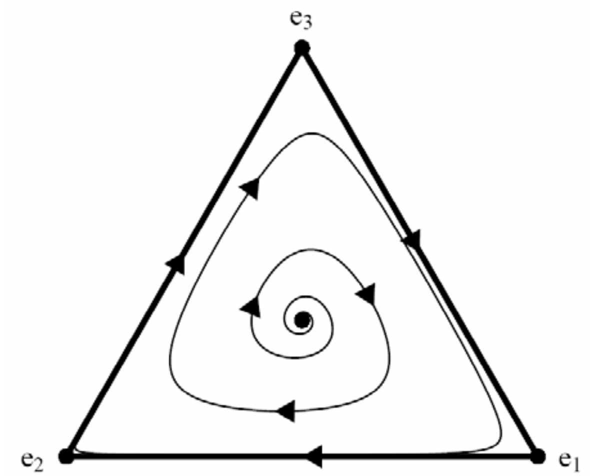
- *Minden NE fixpont*
- *Minden szigorú NE attraktor*
- *Ha egy pálya* $\mathbf{p}^*$*-hoz konvergál, akkor az NE*
- *Ha egy fixpont stabil, akkor az NE*

A fordított állítások nem igazak!

pl. Perturbált Kő-Papír-Olló játék

A középső pont az egyetlen NE,

de nem érhető el dinamikusan!



Statika vs dinamika 2.

Mi a kapcsolat az ESS és dinamikus attraktorok között?

Legfőbb eredmények:

- *Minden ESS attraktor*
- *Minden belső ESS globális attraktor*
- *Potenciálos játékokban ESS=attraktor*
- *2x2-es mátrix játékokban ESS=attraktor*

Az első kettő megfordítása itt sem igaz!

Tanulság:

A dinamika adhat más választ mint a statikus elmélet !

Sztochasztikus játékelmélet

Véges populáció: A **zaj** (sztochasztikus dinamika, hiba, mutáció,…) szerepe nem elhanyagolható!

Valószínűségeloszlás a makro-paraméterek terében $P(\boldsymbol{n}, t)$

KMR modell (1993): 2x2 koordinációs játék

$$s_i(t+1) \;=\; (1-\epsilon)BR[s_{-i}(t)] + \epsilon\,\text{random}$$

ε = 0: x=0 és x=1 stabil fixpontok, x^* instabil fixpont

ε > 0: ergodikus eloszlás, ODE leírás $t \to \infty$-re hibás!

ε → 0: A valószínűség-eloszlás a „kockázat-szempontjából domináló” (risk-dominant) NE-re lokalizálódik (pl. csak x=0-nak marad véges valószínűsége)

Sztochasztikus játékelmélet (2)

Sztochasztikus stabilitás:
Egy egyensúly sztochasztikusan stabil, ha valószínűsége véges marad a zaj→0 limeszben.

A természetben hosszú távon megfigyelhető egyensúlyok sztochasztikusan stabilak!

Egyensúly szelekció: NE finomításai, ESS, dinamikus stabilitás, sztochasztikus stabilitás,…

Játékelmélet aktuális kihívásai

- Korlátozott racionalitás

  Dinamika (mikro, makro)

- Heterogenitás

  Ágensfüggő preferenciák, nyeremények, viselkedési szabályok

- Szociális hálózat

  Nem MF (2D, kisvilág, skála független, hierachikus)

Fizika:
nemegyensúlyi rendszerek, rendezetlenség, hálózatok, tanulási modellek

Javasolt irodalom

Könyvek:

• P. Ball, *Critical mass: How one thing leads to another*,
William Heinemann, London, 2004

• R. Gibbons, *Game Theory for Applied Economists*,
Princeton University Press, 1992

• J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics*,
Cambridge University Press, 1998

Cikkek/URL:

• J. Hofbauer and K. Sigmund, „Evolutionary Game Dynamics",
Bull. Am. Math. Soc., 40, 479 (2003)

• G. Jäger, „Evolutionary Game Theory for linguists. A primer",
http://www.uni-bielefeld.de/lili/personen/gjaeger/egtPrimer.pdf

• http://www.gametheory.net/