

Véletlen mátrixok alkalmazása a gazdasági fizikában

- Bevezetés a véletlen mátrixok lelkivilágába
 - Hagyományos analízis
 - Gráfok
- Wishart mátrixok
- Gazdasági fizikai alapfogalmak
- Korrelációs mátrix analízise
- nem-gaussi eloszlások

Véletlen mátrixok

- Wigner ((1930-as) 1950-es, 60-as évek, Dyson 1960-as évek)
- atommag energiaszintjei: hermitikus mátrix

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \dots & H_{1N} \\ H_{12}^* & H_{22} & H_{23} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & & & & \\ H_{1N}^* & H_{2N}^* & H_{3N}^* & \dots & H_{NN} \end{pmatrix} \quad (1)$$

- szimmetriatulajdonságok:
 - GOE: időtükrözési és forgásinvariancia (valós ábrázolás)
 - GUE: általános (komplex ábrázolás)
 - GSpE: csak időtükrözési invariancia (kvaternió ábrázolás)

Makroszkópikus tulajdonságok: a valószínűségeloszlás

- $P(\mathbf{M}) \sim e^{-N\text{Tr}V(\mathbf{M})}$.
- $V(\mathbf{M}) \sim \mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger + (\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger)^2 + \dots$.
- (G)OE

$$dH = \prod_{k \leq j} dH_{kj}^{(0)} \prod_{k < j} dH_{kj}^{(1)} \quad (2)$$

$$H' = U^{-1} H U \quad (3)$$

U unitér.

- Az $N \times N$ -es mátrix minden invariánsa kifejezhető a mátrix első N hatványának nyomaként.

Bizonyítás

- Minden invariáns a sajátértékek szimmetrikus függvénye és kifejezhető az első N hatvány nyomával:

$$t_j = \text{Tr} H^j = \sum_{k=1}^N \lambda_k^j \quad j = 1, N.$$

például a szekuláris egyenlet együtthatói is, melyek teljes bázist alkotnak a sajátértékeket szimmetrikusan tartalmazó kifejezések terében.

- Lemma: ha a differenciálható függvényekre

$$f_1(xy) = f_2(x) + f_3(y),$$

akkor $f_i(x) = a_i \ln x + b_i$, ahol $b_1 = b_2 + b_3$.

- a \hat{H} mátrix elemei statisztikusan függetlenek.

Alkalmazás

- $\hat{H} = U^{-1} \hat{H}' U$

- $U := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & \dots & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

- $\frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} = A \hat{H} + \hat{H} A^T$, $A_{21} = -A_{12} = 1$, $A_{jk} = 0$, $A = \frac{\partial U^T}{\partial \theta} U$.

- $P(\hat{H}) = \prod f_{kj}^{(\alpha)}(H_{kj}^{(\alpha)})$, statisztikus függetlenség.

- $P(\hat{H})$ invariáns az U transzformációra (θ derivált):

$$\sum \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial H_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial H_{kj}^{(\alpha)}}{\partial \theta} = 0. \quad (4)$$

- Alkalmazva U -t

$$-\frac{1}{f_{1k}H_{1k}} \frac{\partial f_{1k}}{\partial H_{1k}} + \frac{1}{f_{2k}H_{2k}} \frac{\partial f_{2k}}{\partial H_{2k}} = \frac{C_k}{H_{1k}H_{2k}}. \quad (5)$$

- A lemma értelmében $C_k = 0$ (csak log viselkedés engedélyezett).

-

$$f_{1k}(H_{1k}) = e^{-aH_{1k}^2} \quad (6)$$

- Ez tetszőleges U -ra megismételhető, f_{jk} gausszi.

- Invariánsokkal kifejezve: max 2. rendű invariánsok

$$P(\hat{H}) \sim e^{-a\text{Tr}\hat{H}^2 + b\text{Tr}\hat{H} + C} \quad (7)$$

$a > 0, b, C$ valós.

- Erősen kihasználtuk, hogy a mátrixelemek egymástól függetlenek!

Makroszkópikus tulajdonságok: a spektrum

- $\varrho_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ sajátértékeloszlás N változót tartalmaz az $N(N+1)/2$ független mátrixelemből.
- Az invariánsok is csak ezeket tartalmazzák.
- maradt $N(N-1)/2$ db. p_1, \dots, p_l változó:

$$dH = e^{\sum_i -a\lambda_i^2 + b\lambda_i + c} J(\lambda, p) d\lambda_i dp_j \quad (8)$$

- Jacobi

$$J(\lambda, p) = \left| \frac{\partial(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_N, p_1, \dots, p_l)} \right| \quad (9)$$

- ismét véve az U diagonalizáló mátrixok: $\hat{H} = U\Lambda U^{-1}$, $UU^T = 1$, és deriválva ezeket a p_i , illetve λ_i szerint kiszámítható a Jacobi

-

$$J(\lambda, p) = \mathcal{N}(p) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \quad (10)$$

- Általánosan

$$\varrho_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = C e^{-\frac{1}{2}\beta \sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (11)$$

- $\beta = 1$ (GOE), $\beta = 2$ (GUE), $\beta = 4$ (GSpE).
- Coulomb gáz: töltések az x_i helyeken, potenciál

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_i x_i^2 - \sum_{i < j} \ln |x_i - x_j| \quad (12)$$

Egyrészecske spektrum

- $\varrho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots dx_N \varrho_N(\lambda, x_2, \cdots, x_N)$

- A potenciális energia várható értéke

$$W(\varrho) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \varrho(x) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \varrho(x) \varrho(y) \ln |x - y| \quad (13)$$

- Kényszerfeltétel: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \varrho(x) = N$

- nyeregpon:

$$\frac{1}{2} x^2 - \int_{-\infty}^{\infty} dy \varrho(y) \ln |x - y| = 0 \quad (14)$$

- x szerint deriválva

$$x = P \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\varrho(y)}{x - y} \quad (15)$$

Megoldás



$$\varrho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2N - \lambda^2} \quad \lambda^2 < 2N \quad (16)$$

- Normálás

$$P(H) \sim e^{-\frac{1}{2} N \text{Tr} H^2}. \quad (17)$$

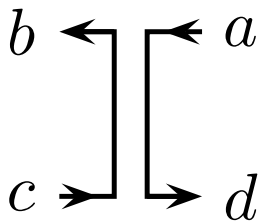
$$\langle H_{ij} H_{kl} \rangle = \frac{1}{N} \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (18)$$

Gráfok

- 0+0 dimenziós térelmélet $\mathcal{L} = \bar{\psi}_a (z\mathbf{1}_a^b - H_a^b) \psi^b$ Lagrange függvényel.

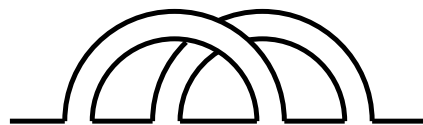
- gráfszabályok:

$$\overleftarrow{\quad} \quad \frac{1}{z}$$



$$\langle H_b^a H_d^c \rangle = \frac{1}{N} \delta_d^a \delta_b^c$$

- síkbeli gráfok



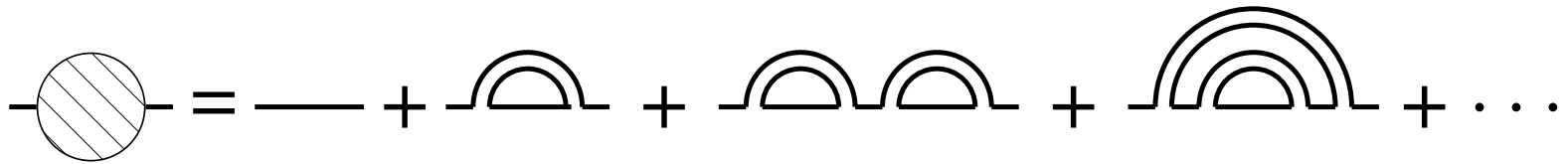
$$\frac{1}{N} \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2}$$



$$\frac{1}{N} \cdot N \times \frac{1}{N} \cdot N = 1$$

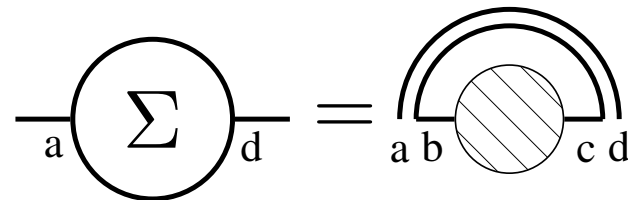
- propagátor:

$$G(z) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{z - \hat{H}} \right\rangle = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr} \left(\hat{H} \frac{1}{z} \right)^n \quad (19)$$



- sajátenergia

$$G(z) = \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z - \hat{\Sigma}} \quad (20)$$



$$\hat{\Sigma}_{ad} = \left(\frac{1}{z - \hat{\Sigma}} \right)_{bc} \frac{1}{N} \delta_d^a \delta_b^c \quad (21)$$

- a sajátenergia diagonális

$$\hat{\Sigma} = \Sigma \mathbf{1} \quad (22)$$

- és megegyezik a propagátorral

$$\frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z - \hat{\Sigma}} = \Sigma = G(z) \quad (23)$$

- $\frac{1}{z - G(z)} = G(z)$ megoldása

$$G(z) = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}, \quad \longrightarrow \quad \varrho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2} \quad (24)$$

Wigner félkör.

Következmények

- Szabad nemkommutáló változók:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad \Longrightarrow \quad \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 \quad (25)$$

a sajátenergiák összeadódnak.

- recept: a rezolvens inverze

$$B[G(z)] = z; \quad B(z) = B_1(z) + B_2(z) - \frac{1}{z}; \quad \Sigma = B - \frac{1}{z} \quad (26)$$

- példa: két egységnyi szórású G^*E :

$$B_1(z) = B_2(z) = z + \frac{1}{z} \quad \Longrightarrow \quad B(z) = 2z + \frac{1}{z}$$

$$B[G(z)] = z \quad \Longrightarrow \quad G(z) = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 8}}{4}, \quad \varrho(\lambda) \sim \sqrt{(\sqrt{2} 2)^2 - \lambda^2} \quad (27)$$

- Szorzás

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2 \quad (28)$$

- $S(z) = S_1(z) \cdot S_2(z)$:

$$S(z) = \chi(z) \frac{z+1}{z}, \quad \chi[zG(z) - 1] = \frac{1}{z}. \quad (29)$$

- G^*E : $S_G = \frac{1}{\sqrt{z}}$

- projektor: $T \times T$ mátrix, N eleme nem nulla

$$S_P = \frac{z+1}{z+m}, \quad m = \frac{N}{T} \quad (30)$$

-

$$G_{G^*P}(z) = \frac{z}{2} + \frac{1-m}{z} \pm \frac{\sqrt{z^2 - 4m}}{2}, \quad \varrho(\lambda) = (1-m)\delta(0) + \frac{1}{2\pi} \sqrt{4m - \lambda^2}$$

Mikroszkópikus tulajdonságok:

- n . szomszéd távolság eloszlása
- energiaszint eloszlás
- mennyiségek az $1/N$ (átlagos energiaszint távolság) skálán
- T. Guhr, A. Mueller-Groeling, H.A. Weidenmueller, Phys. Rept. **299** 189 (1998).
- káosz, kaotikus rendszerek.

Wishart mátrixok

- Wishart, Biometrika **A20** 32 (1928)
- $\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger$, ahol \mathbf{M} $N \times T$ mátrix
- multivariáns adatok vizsgálata
- ha $\mathbf{W} = \mathbf{M}^2$, ahol \mathbf{M} valós, szimmetrikus véletlen mátrix,

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{W}}(z) &= \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{z - \mathbf{M}^2} \right\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{\sqrt{z} - \mathbf{M}} - \frac{1}{-\sqrt{z} - \mathbf{M}} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} G_{\mathbf{M}}(\sqrt{z}) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\varrho_{\mathbf{W}}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \varrho_{\mathbf{M}}(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4/\lambda - 1} \quad (32)$$

- Gauss eloszlásra

$$S_{G^2} = \frac{1}{z+1}, \quad S_{G^2 * P} = \frac{1}{z+m} \quad (33)$$

- rezolvens (két $T \times T$ gauss és a $\text{diag}(N * 1, (T-N) * 0)$ projektor szorzata

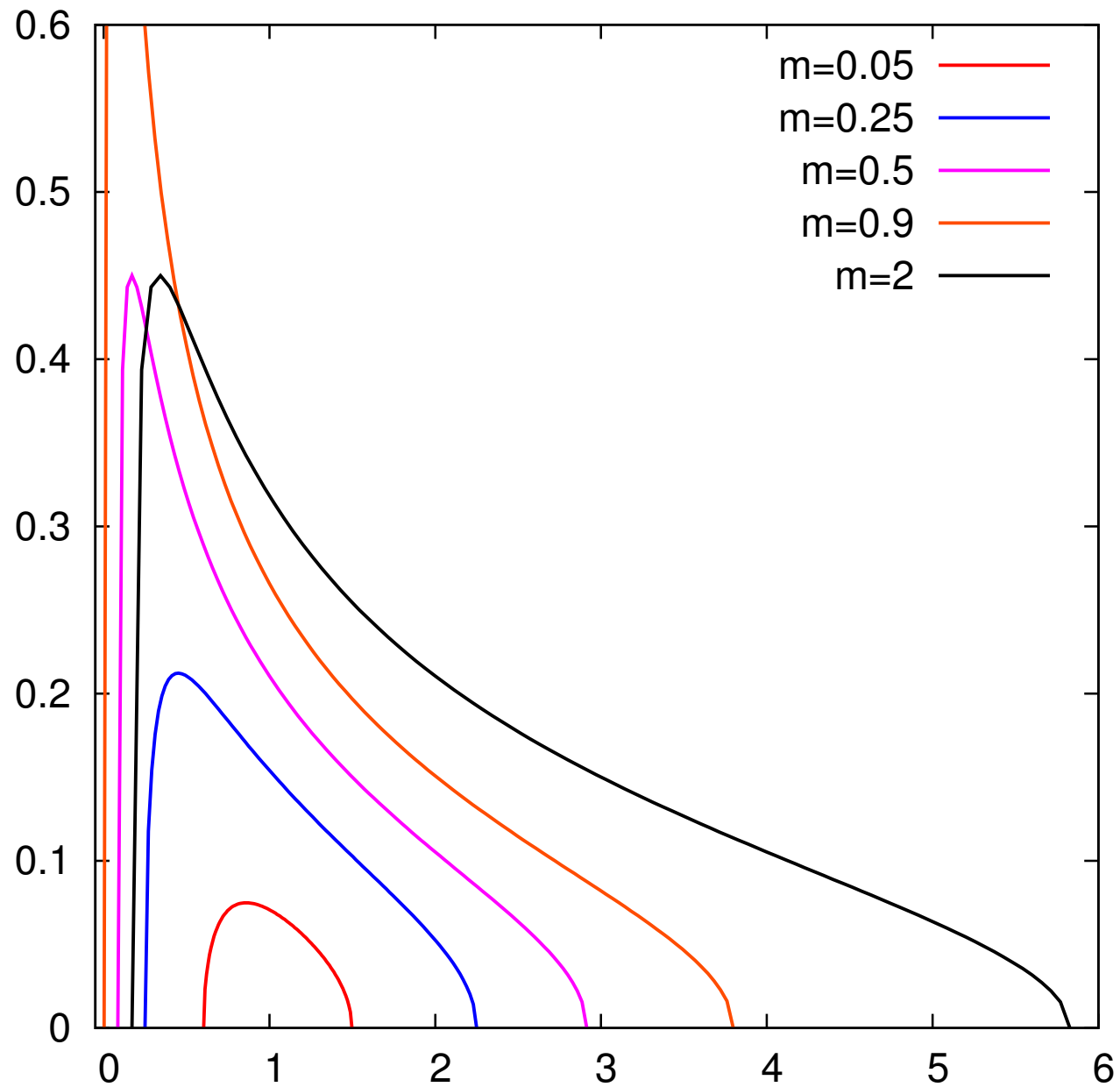
$$G(z) = \frac{1-m}{2z} + \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{1-m}{z} - 1\right)^2 - \frac{4m}{z}} \right] \quad (34)$$

- spektrum

$$\varrho(\lambda) = (1-m)\delta(0) + \frac{1}{2\pi\lambda} \sqrt{(\lambda - \lambda_{\min})(\lambda_{\max} - \lambda)},$$

$$\lambda_{\min, \max} = (1 \pm \sqrt{m})^2 \quad (35)$$

- ha $m > 1$ a nulla sajátértékek eltűnnek.



A skála (σ) nyújthatja a spektrumot, de a $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ arány csak az m paramétertől függ.

Alapfogalmak

- idősorok

$X_i(t)$: az i vagyoneszköz (asset) értéke t időben

$$x_i(t) = \frac{X_i(t+1) - X_i(t)}{X_i(t)} : \text{árváltozás}$$

$$x_i(t) = \log \frac{X_i(t+1)}{X_i(t)} : \text{logaritmikus árváltozás}$$

gyakoriság: tick-by-tick, 5s, ..., napi, heti, havi, negyedévi, évi, ...

- Volatilitás, kockázat

$$\sigma(t, T) = \frac{1}{T} \sum_t^{T+t} |x_i(t)|^k, \quad k = 1, 2$$

- Portfólió

$p_i(t) : \sum_i p_i = 1, p_i$ a teljes vagyon azon hányada, melyet az i eszközbe fektetünk

Véletlen változók

- az árak véletlenszerűen mozognak, a véletlen változó az

árváltozás

(relatív vagy logarimikus)

- gausszi: a nagy fluktuációk oka a **korrelált** mozgás.
- Lèvy: a nagy fluktuációk természetesek.

Kovariancia mátrix

- Kovariancia mátrix:

$$C_{ij} = \langle x_i(t)x_j(t) \rangle_t.$$

- A cél: a portfólió **kockázatának** minimalizálása (gausszi folyamat)

$$R = \langle p_i C_{ij} p_j \rangle$$

a megoldás

$$p_i = \frac{\sum_k C_{ik}^{-1}}{\sum_{i,k} C_{ik}^{-1}}$$

(Markowitz)

- A **kovariancia mátrix** alakja azonban lényeges lehet.

Kovariancia mátrix

def: $m_i(t) = (x_i(t) - \bar{x}_i)$

$$\mathbf{C}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{m_i(t)}{X_i(1)} \frac{m_j(t)}{X_j(1)}$$

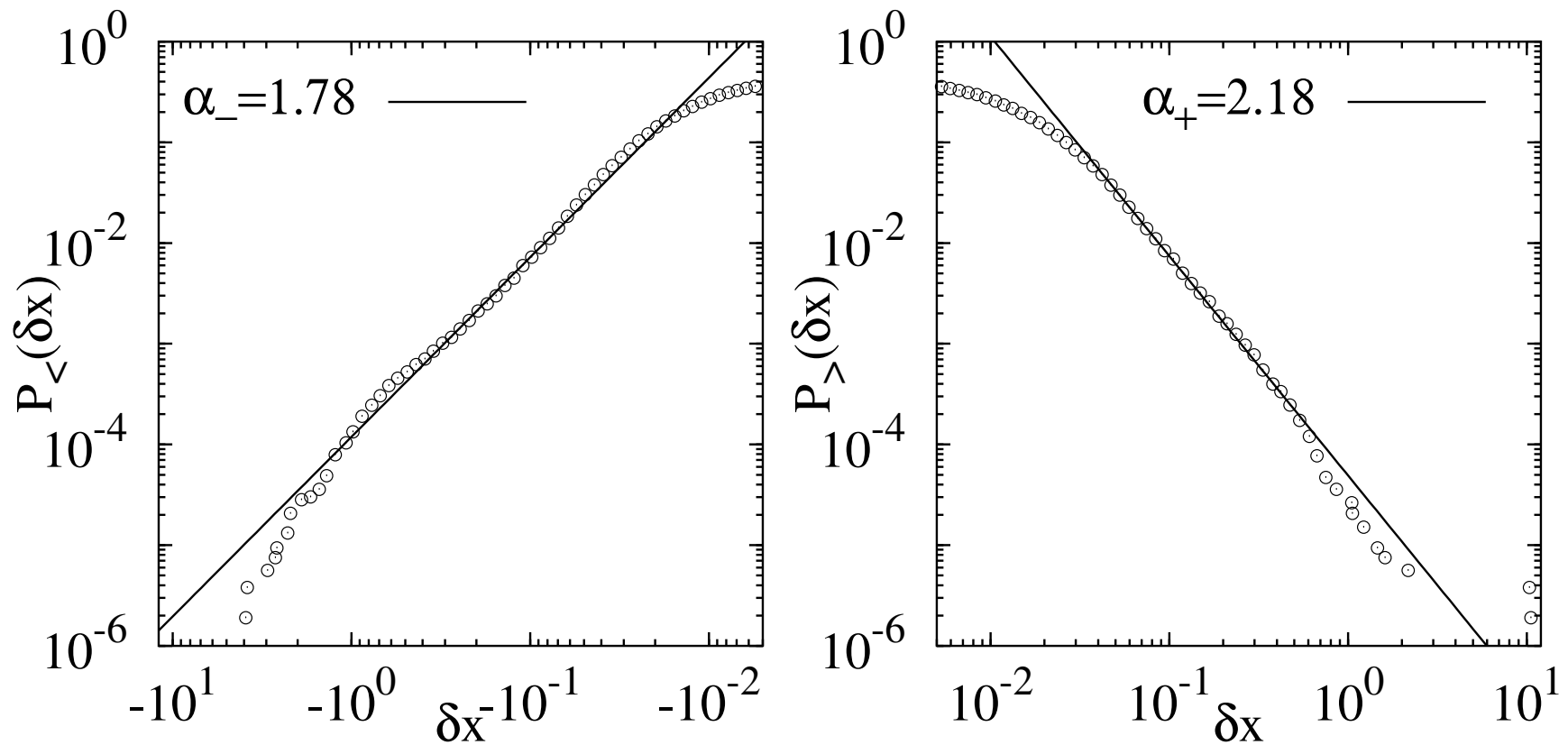
$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{m_i(t)}{\sigma_i} \frac{m_j(t)}{\sigma_j}$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{m_i(t)}{r_i} \frac{m_j(t)}{r_j}$$

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \text{sgn } m_i(t) \text{sgn } m_j(t)$$

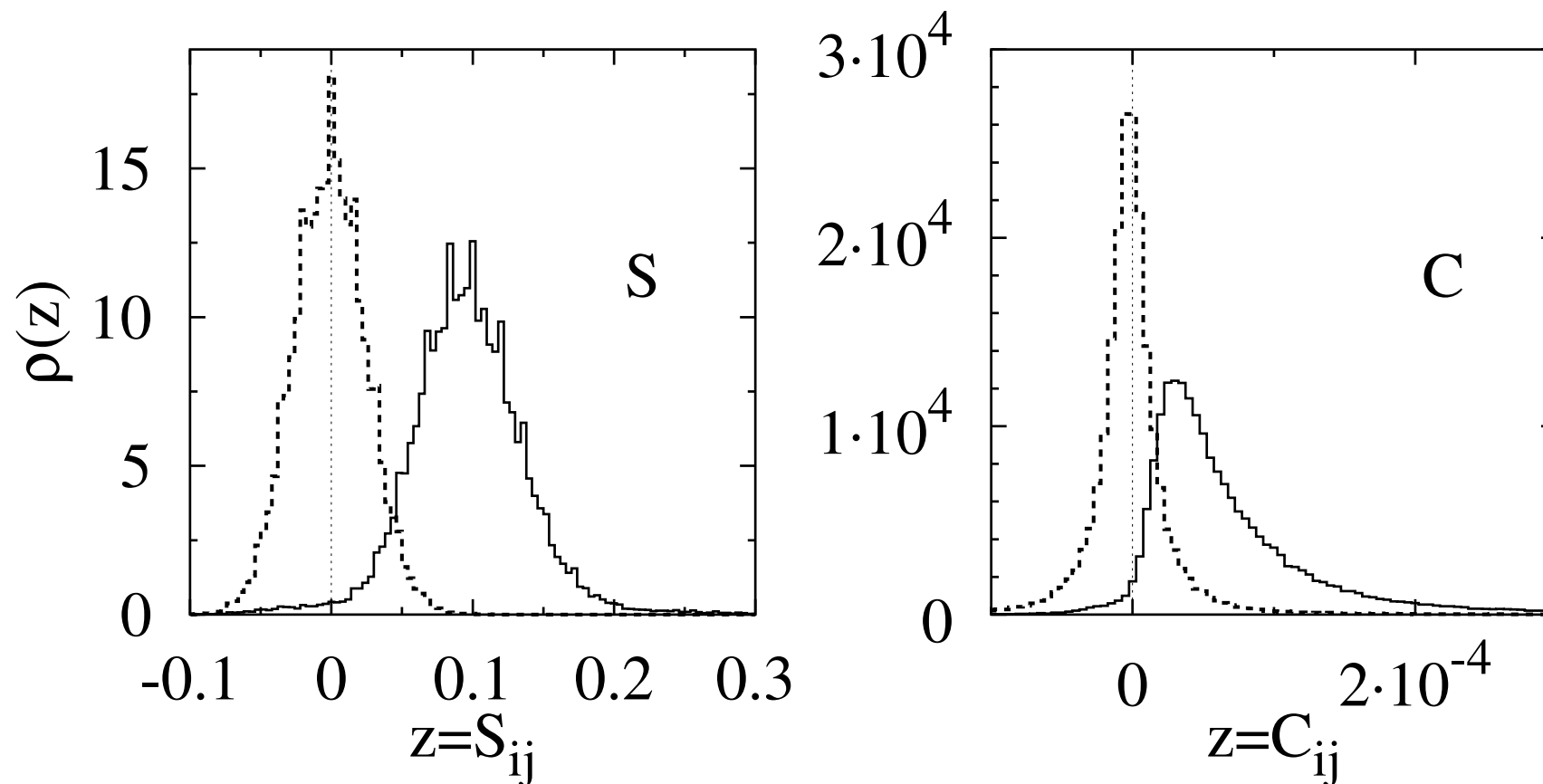
σ_i gausszi szélességgel, illetve r_i ($k = 1$) volatilitással.

Hosszú farkak



1. ábra. $P_{<}(\xi)$ és $P_{>}(\xi)$ kumulatív eloszlások a \mathbf{C} mátrix felépítésére használt idősorokban (SP500 napi részvényárfolyamok, 1980.01.01-től 2000.06.30-ig 406 részvényre ($T=1309$, $N=406$)).

Korrelációk



2. ábra. (a) Az **S** előjelek korrelációja (nemdiagonális elemek eloszlása) az SP500 idősorban (folytonos vonal), illetve a véletlenszerű permutáció után (szaggatott vonal). (b) Ugyanaz a **C** mátrixra.

Sajátértékek

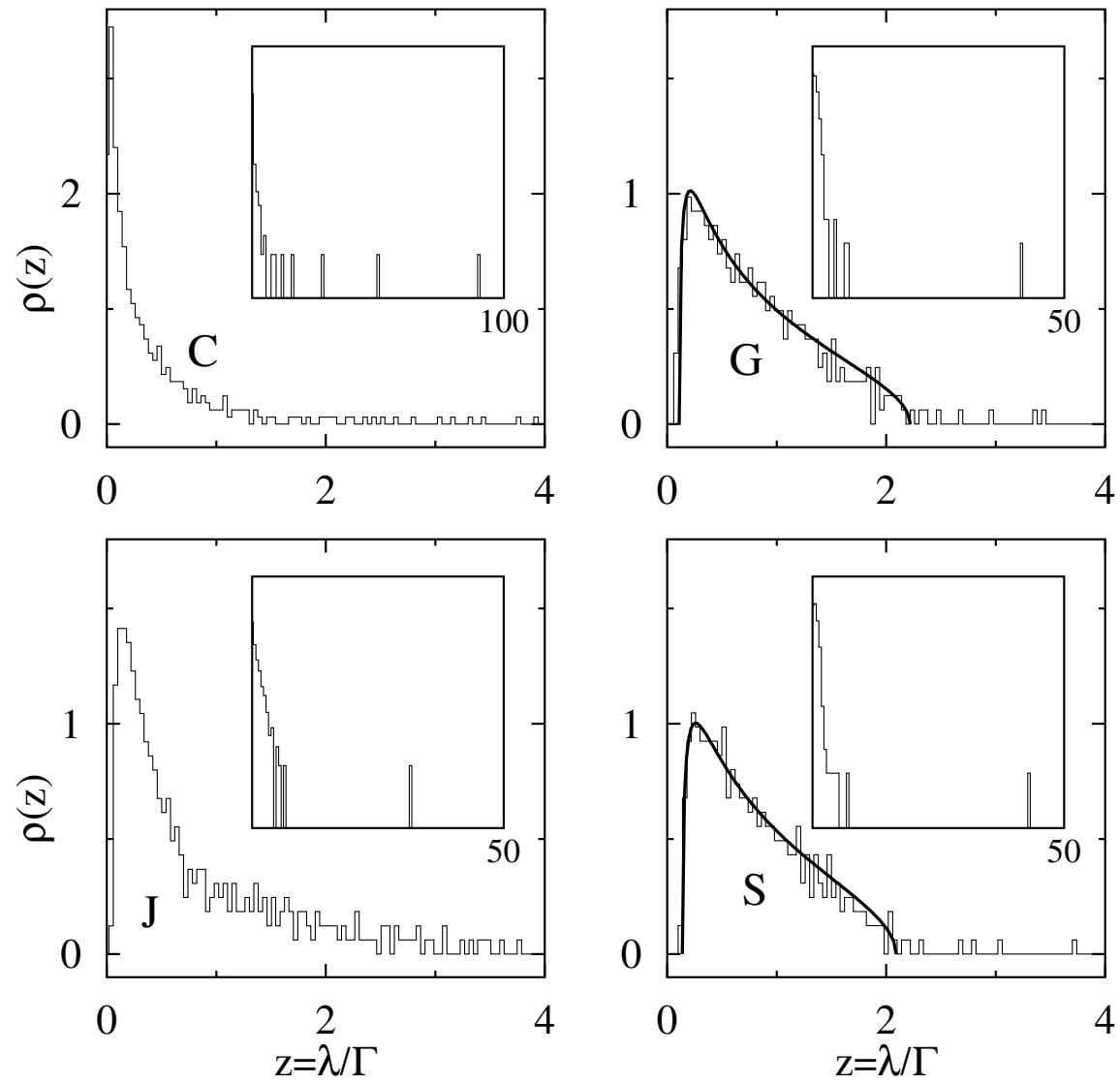
A kovariancia mátrix sajátértékei

- A „független összetevők” árváltozásait mutatják
- Nagy sajátértékek: nagy ármozgások
- a gausszi esetben a nagy mozgás korrelált, együttes folyamatot jelent, sok résztvevővel („piac”, „cégcsoportok”).
- A gausszi Wishart mátrixok spektruma

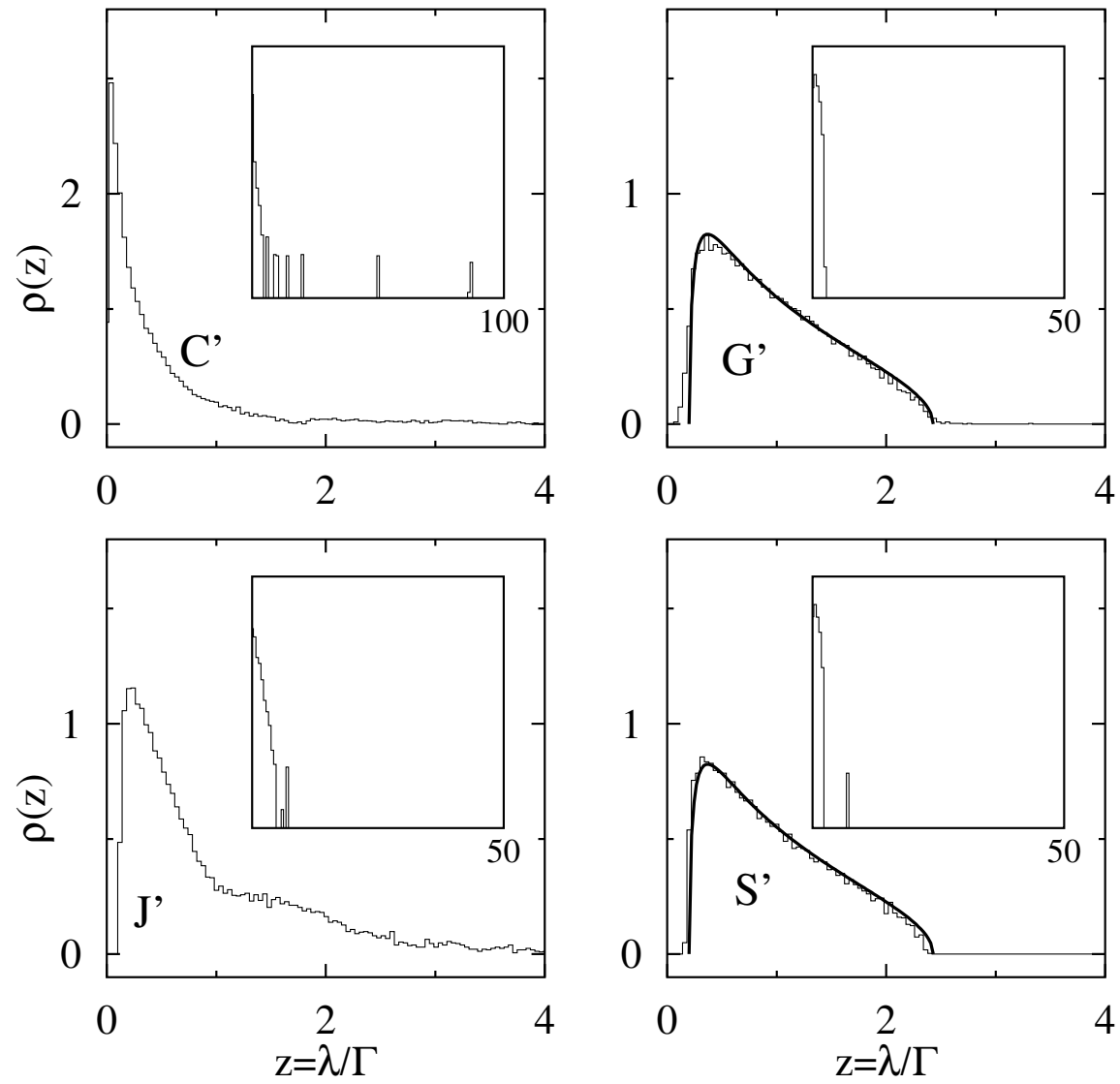
$$\nu(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda} \sqrt{(\lambda - \lambda_{min})(\lambda - \lambda_{max})} \quad (36)$$

ahol $\lambda_m = (1 \pm 1/\sqrt{m})^2$, $m = T/N=1308/406$ az SP500 mintán.

- Lévy eloszlás esetén a nagy változások „ritkák”, de természetesek



3. ábra. A C,G,J and S mátrixok sajátértékspektruma.

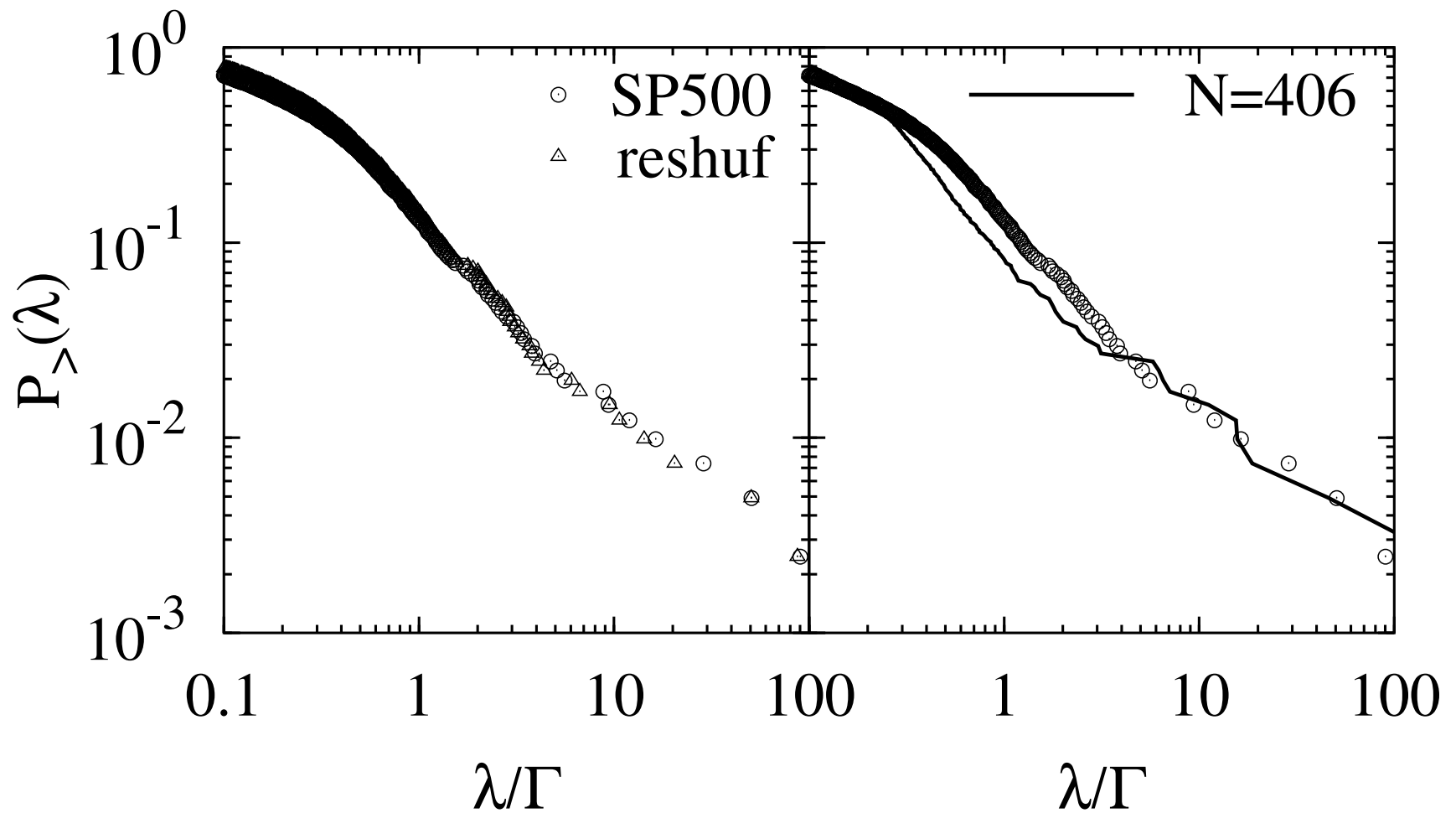


4. ábra. A sajátértékeloszlás az idősorok permutációja után.

Sajátértékek

A gausszi analízis **működik** a **G** és **S** kovarianciamátrixra, azonban az $m = T/N$ paraméter az illesztés során kicsit nagyobbak adódik, mint várnánk.

- SP500 adatsor: $N_{eff} = 285$ részvény a felhasznált 406 helyett. A részvények közötti korreláció lecsökkenti a független elemek számát.
- Permutált idősorok: $N_{eff} = 395$ részvény adódik függetlennek a 406-ból. A permutálás megszünteti a korrelációkat, és minden részvényt függetlennek állít be.
- Gausszi-e a kovariancia mátrix?



5. ábra. (a) Az SP500 idősröböl előállított \mathbf{C} kovarianciamátrix kumulatív sajátértékeloszlásának összehasonlítása a permutált idősröböl kapott eredménnyel. (b) Ugyanaz az összehasonlítás, de véletlenszerűen generált Lévy mátrixokkal.

Inverz betöltöttségi arány

A kovarianciamátrix diagonalizálása nemcsak a λ_i sajátértékeket, de a nekik megfelelő v^i sajátvektorokat is megadja.

- Inverse participation ratio (IPR)

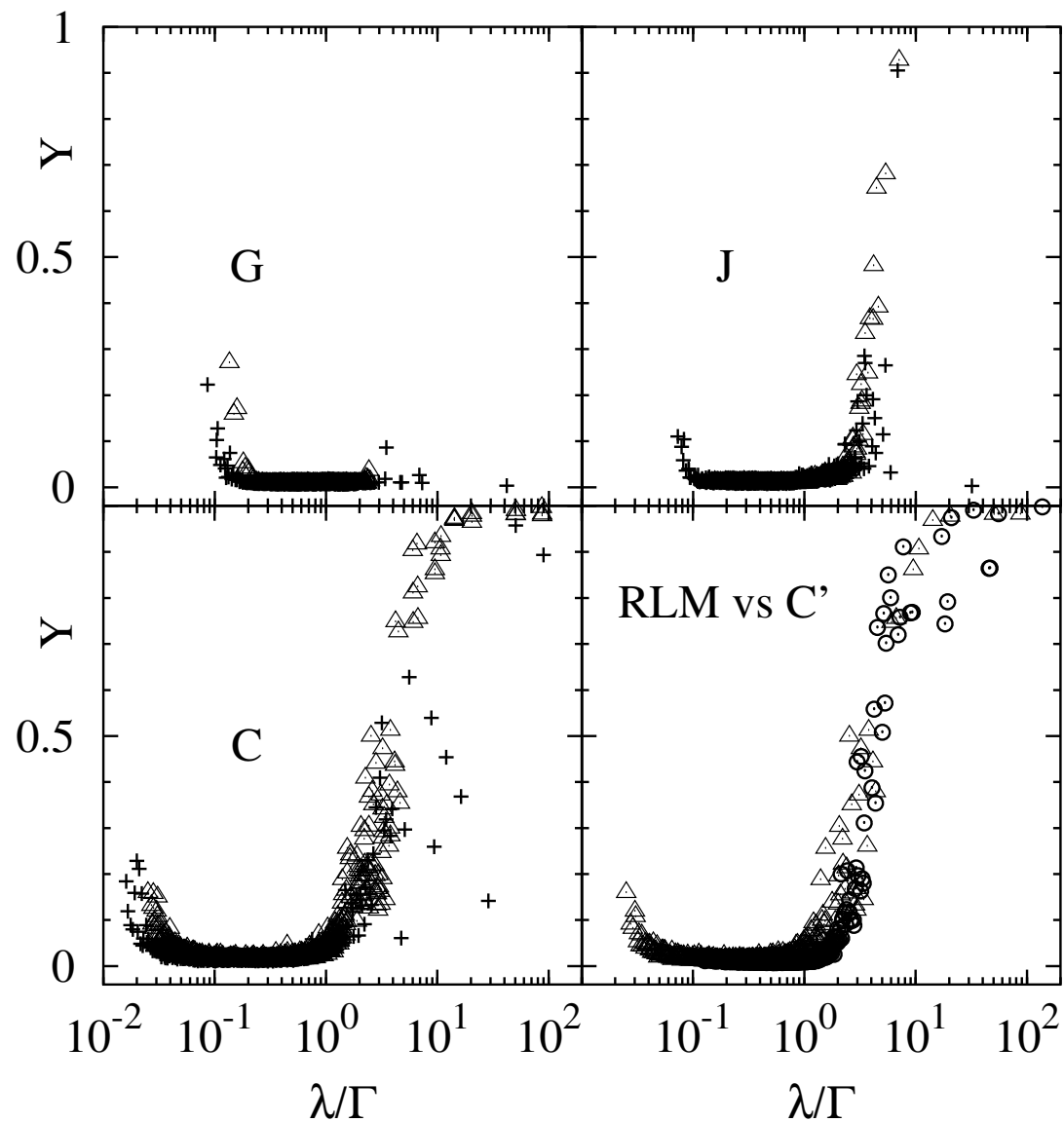
$$Y = \frac{\sum_i |\langle v^i | v^i \rangle|^2}{\sum_i |\langle v^i | v^i \rangle|}$$

- Lokalizált állapot: $v_j^i = \delta_{ij}$

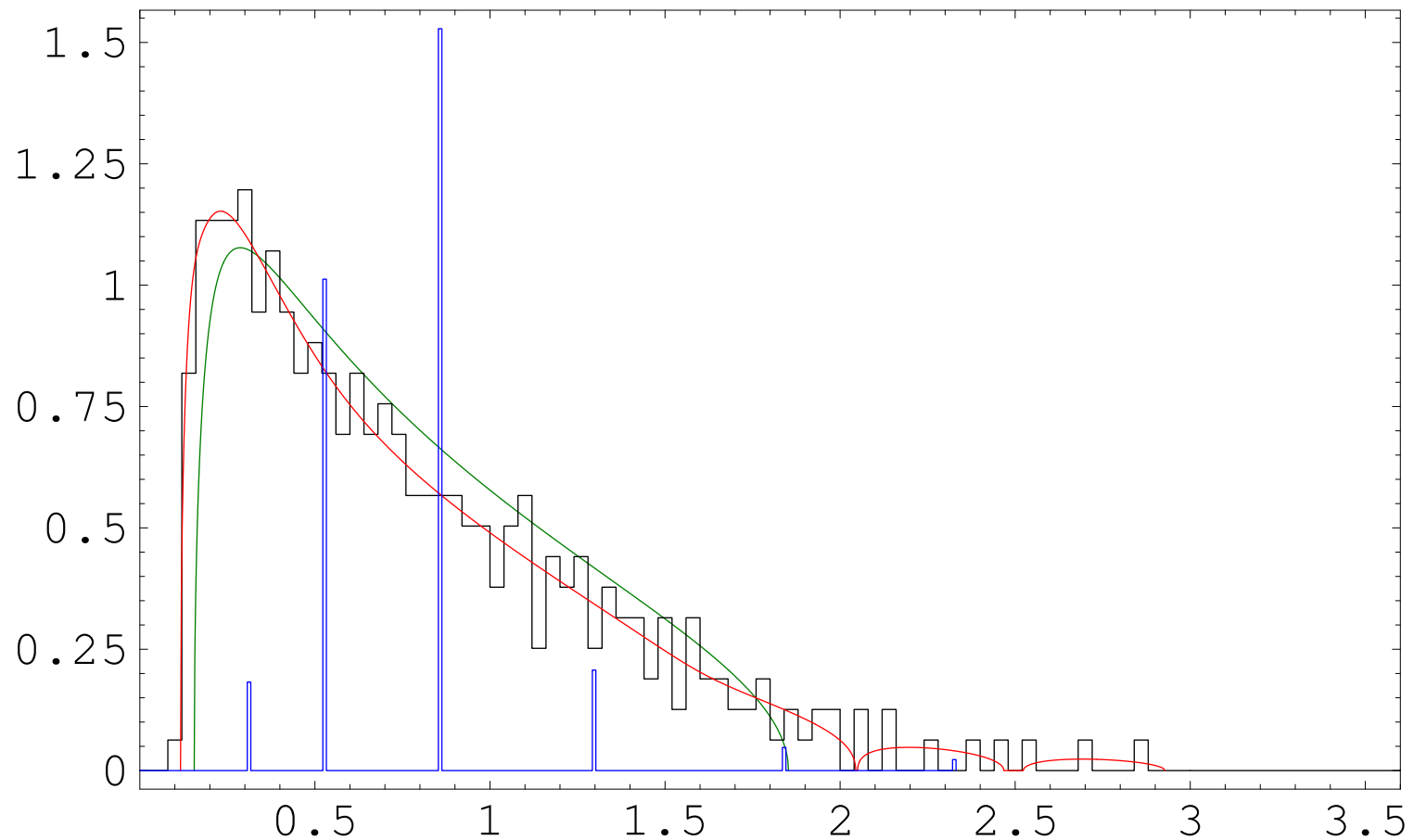
$$Y = 1$$

- Kollektív állapot: $v_j^i = \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$Y = \frac{1}{N}$$



6. ábra. IPR az SP500 kovarianciamátrixokra, az eredeti (keresztek) és a permutált (háromszögek) idősorokra. Jobb alsó: a háromszögek egy Lévy mátrixokkal való szimuláció eredményei.



7. ábra. Az SP500 kovarianciamátrix sajátértékspektrumának közelítése korrelált eloszlás feltételezésével.

$$P(H) = e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} H^\dagger C^{-1} H} \quad (37)$$

C kétpont korrelációs mátrix (valós, szimmetrikus, pozitív)

Összefoglalás

- A kovarianciamátrix gausszi konstrukciójával gausszi választ is kapunk, még ha az eredeti idősorok hosszú farkú eloszlást követnek.
 - A sajátértékeloszlás követi a RMT-t.
 - Az IPR erősen delokalizált, kollektív állapotokat mutat a nagy sajátértékeknél, és ez arra utal, hogy azok egy kollektív mozgás eredményei.
- A Lévy analízis is konzisztens annak alapvető feltételezéseivel
 - A nagy sajátértékek megmaradnak az idősorok perturbációja után is.
 - Az IPR lokalizált, egy, vagy kevés részvényre kiterjedő állapotokat mutat a nagy sajátértékeknél, és az arra utal, hogy azok nem kollektív mozgás eredményei, hanem a Lévy fluktuációkból származnak.