Györgyi Géza

ELEKTRODINAMIKA II: KLASSZIKUS SUGÁRZÁSELMÉLET

Gáspár Merse Előd és Oroszlány László által készített jegyzet alapján.

2010. december

Tartalomjegyzék

1. Captatio benevolentiæ

Hagyománytiszteletből őriztük meg a fél évszázada előadott „Klasszikus sugárzáselmélet” kurzus címét. A hangsúly most kettős, először bevezetést adunk a klasszikus térelméletbe, majd rövidebben foglalkozunk elektrodinamikai jelenségekkel.

Az előadáshoz kapcsolódik a „A klasszikus térelmélet elemei” hallgatói szeminárium. Ennek célja egyrészt a matematikai alapozás, nagyobb részben pedig az előadáson bemutatott térelméleti formalizmus fizikai alkalmazása.

A források között kiemelendő Landau–Lifsic: Elméleti fizika II, Jackson: Classical Electrodynamics, Marx György: Klasszikus sugárzáselmélet (egyetemi jegyzet), Abonyi Iván kézzel írt jegyzete azonos című kurzusáról, valamint Dávid Gyulával folytatott diszkussziók a relativisztikus pontmechanika és hidrodinamika tárgykörében.

2. Emlékeztető elektrodinamikából

Tekintettel arra, hogy az Elektrodinamika I kurzus óta egy nyár telt el, az első órán felidézzük a Maxwell egyenleteket (ME).

Levezethetők-e a ME már a középiskolában megismert, XIX. szd-i kísérleti eredményekből? Az alábbi tapasztalati törvényekből kiindulva megmutatjuk, hogy a ME megkaphatók, majd értelmezzük az eredményt.

→ Coulomb törvény

→ szuperpozició elve

→ nincs mágneses monopólus

→ Faraday törvény

→ Biot–Savart törvény

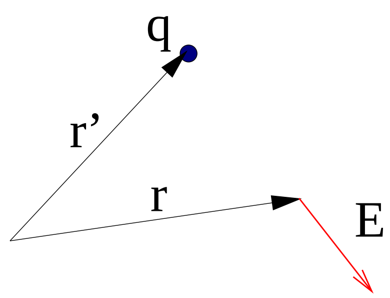
→ töltésmegmaradás

2.1. Coulomb-törvény és szuperpozíció

A Coulomb törvény szerint egy ponttöltés tere az $\boldsymbol{r}$ helyen

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = q\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = -q\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'), \tag{2.1}$$

ahol q a töltés nagysága és $\boldsymbol{r}'$ a helyvektora.



1. ábra. A Coulomb törvényhez.

2.1. Gyakorló feladat. *Javasoljunk kísérletet, amellyel nagy pontossággal igazolható az $1/r^2$-es erőtörvény.*

Bevezetve a

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{2.2}$$

potenciált,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\varphi. \tag{2.3}$$

Vizsgáljuk a Laplace operátor hatását az $1/r$-re. Az origón kívül

$$\Delta\frac{1}{r} = -\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{3}{r^3} + \boldsymbol{r}\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5} = 0 \qquad /\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}/. \tag{2.4}$$

2.2. Gyakorló feladat. *Mutassuk meg d dimenzióban csak a rádiusztól függő $f(r)$ függvényre*

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{d-1}{r}f'(r) = r^{1-d}\left(r^{d-1}f'(r)\right)'. \tag{2.5}$$

Az origó körüli ϵ sugarú gömbre

$$\int_{\epsilon\geq r}\Delta\frac{1}{r}\,\mathrm{d}^3r \underset{\text{Gauss}}{=} \int_{\epsilon=r}\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\int\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,\boldsymbol{r}\,r\mathrm{d}\Omega = -4\pi. \tag{2.6}$$

Mivel az integrandus az origón kívül eltűnik, tetszőleges, az origót magában foglaló térfogatra ugyanezt az eredményt kapjuk. Az olyan „függvény”-t, amely zérus egy ponton kívül, viszont a pontot magában foglaló tetszőleges térfogatra egységnyi az integrálja, Dirac deltának nevezzük, ezért

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}), \quad \Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{2.7}$$

A Dirac delta valójában integráloperátor, amelyet egy dimenzióban a következő kifejezéssel definiálhatunk

$$\int_a^b f(x')\delta(x'-x)\mathrm{d}x' = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \notin [a,b], \\ f(x) & \text{ha } x \in (a,b). \end{cases} \tag{2.8}$$

2.1. Házi feladat. *Mutassuk meg, hogy ha valamely sima $g(x)$ függvényre $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1$, akkor $\varepsilon > 0$ mellett $\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ az $\varepsilon \to 0$ limeszben a Dirac deltát adja, a $g(x)$ konkrét alakjától függetlenül. Számítsuk ki a (2.8) integrál értékét az $\varepsilon \to 0$ limeszben, ha $x = a$ ill. b. Az eredmény már függ a $g(x)$ választásától (10%).*

A d dimenziós Dirac delta

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{d} \delta(x_i). \tag{2.9}$$

A ponttöltés terének divergenciája tehát

$$\boldsymbol{\nabla E} = -\Delta\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = 4\pi\underbrace{q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}_{\varrho(\boldsymbol{r})}, \tag{2.10}$$

ahol bevezettük $\varrho(\boldsymbol{r})$-t, a ponttöltés töltéssűrűségét. Több ponttöltésre kiterjesztve

$$\varrho(\boldsymbol{r}) = \sum_i q_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i). \tag{2.11}$$

A tapasztalat szerint töltések terei összeadódnak, ez a szuperpozíció elve. Ezért írhatjuk

$$\boldsymbol{\nabla E} = 4\pi\varrho \qquad \text{(I. anyagi ME)}, \tag{2.12}$$

és a potenciál

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} = \int \frac{\varrho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r'. \tag{2.13}$$

2.2. Nincs mágneses ponttöltés

Mágneses ponttöltést — egyelőre — kísérletileg nem találtak, ezért a Gauss-tétel alapján

$$\boldsymbol{\nabla B} = 0. \tag{2.14}$$

Ez az I. vákuumbeli ME.

2.3. Faraday-törvény

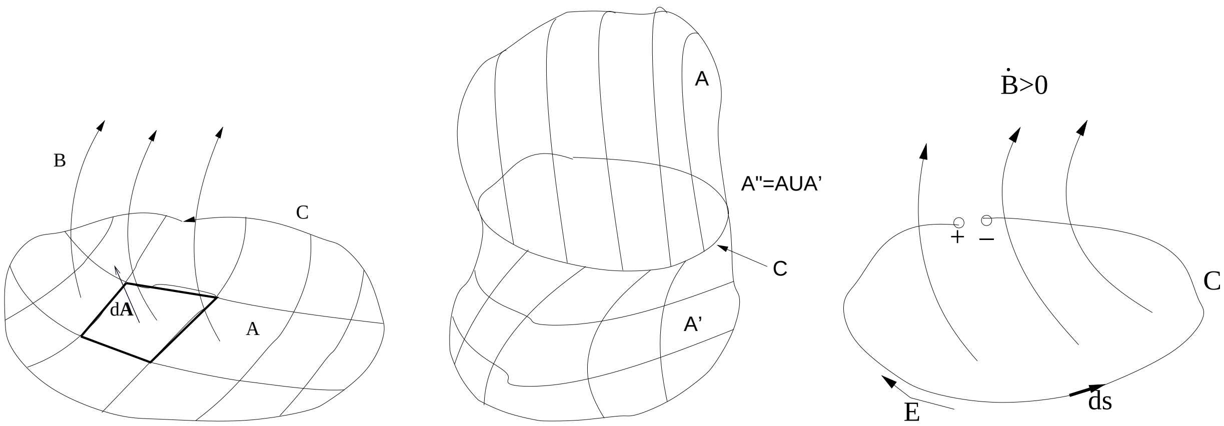
Az A irányított felületen átmenő mágneses fluxus

$$\Phi = \int_A \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{A}. \tag{2.15}$$

Ez csak az A határvonalától, $C = \partial A$-től függ, ugyanis

$$\Phi' = \int_{A'} \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_A \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{A} - \int_{A''} \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \Phi - \underbrace{\int_V \boldsymbol{\nabla B}\mathrm{d}V}_{0} = \Phi, \tag{2.16}$$

ahol $C = \partial A' = \partial A$ és $A'' = A \cup A'$.



2. ábra. A bal és középső ábra a fluxusok azonosságát, a jobboldali a Faraday törvényt illusztrálja. A C kontúr rögzített, a d$\boldsymbol{s}$ vonalelem és a felület a jobbkézszabály szerint irányítottak.

Faraday kísérleti törvénye

$$U = -\frac{1}{c}\dot{\Phi} \tag{2.17}$$

$$\Rightarrow \quad U = \int_C \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_A \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \\ = -\frac{1}{c}\dot{\Phi} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\int_A \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{A}. \tag{2.18}$$

Mivel ez minden felületre teljesül, azért

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \tag{2.19}$$

ez a II. vákuumbeli ME.

2.4. Töltésmegmaradás

Számítsuk ki a töltéssűrűség időderiváltját

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_i q_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t)) = -\sum_i q_i\boldsymbol{v}_i(t)\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t)) \tag{2.20}$$

Bevezetve a $\boldsymbol{j}$ áramsűrűséget

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \sum_i q_i\boldsymbol{v}_i(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t)) \tag{2.21}$$

írhatjuk

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t). \tag{2.22}$$

Innen

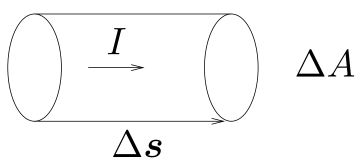
$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j} = 0, \tag{2.23}$$

ez a kontinuitási egyenlet. Ha most felírjuk egy adott térfogatból kifolyó teljes áramot,

$$I = -\dot{Q} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho\,\mathrm{d}^3r = -\int_V \frac{\partial\varrho}{\partial t}\mathrm{d}^3r = \int_V \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j}\mathrm{d}^3r \underset{\text{Gauss}}{=} \int_A \boldsymbol{j}\mathrm{d}\boldsymbol{A}, \tag{2.24}$$

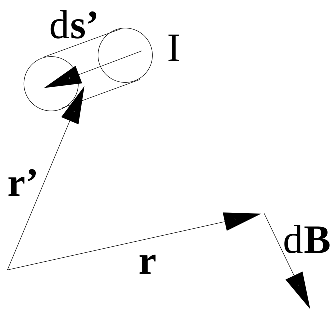
akkor kiviláglik, hogy $\boldsymbol{j}$ felületi áramsűrűség. A 3. ábráról látszik, hogy

$$I\Delta\boldsymbol{s} = \boldsymbol{j}\Delta V. \tag{2.25}$$



3. ábra. Az áramsűrűség jelentése elemi vezető esetére.

2.5. Biot–Savart-törvény



4. ábra. A Biot-Savart törvényhez.

Egy d$\boldsymbol{s}'$ elemi vezető, melynek helyvektora $\boldsymbol{r}'$ és I erősségű áram folyik benne, az $\boldsymbol{r}$ pontban d$\boldsymbol{B}$ infinitezimális indukciós teret kelt a Biot–Savart törvény szerint

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{I}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}^3r' = \underset{\substack{\uparrow \\ -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\psi(\boldsymbol{r}))}}{} \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \tag{2.26}$$

Ennek alapján

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}, \quad \text{ahol} \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r'. \tag{2.27}$$

Ebből az I. vákuum ME következik. Vektoranalitikai azonosság szerint

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}. \tag{2.28}$$

Feltéve, hogy a vizsgált térfogat a teret keltő áramokat magában foglalja, a határon ezek zérusak

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{c}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \underset{\substack{\text{parc.int.}\\ +\text{Gauss tétel}}}{=} \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\int\frac{\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &= -\frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\int\frac{\frac{\partial\varrho(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\int\frac{\varrho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\end{aligned} \tag{2.29}$$

továbbá (2.7) felhasználásával

$$\Delta\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int\Delta\frac{j(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}), \tag{2.30}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(II. anyagi ME.)} \tag{2.31}$$

2.6. Értelmezés

Levezettük-e ezzel a ME-t?

A felhasznált törvények csupán lassú töltésekre érvényesek. Gyors töltésekre a kiinduló egyenletek nem állnak fenn, hiszen például a Coulomb törvény helyett, mint ma már tudjuk, a Liénard–Wiechert potenciál érvényes. Viszont kísérletek azt mutatták, hogy a csak kis sebességekre igaz törvényekből kiindulva levezetett téregyenletek gyorsan változó terekre is fennállnak!

Példaként említjük, hogy a ME-ek alapján gyorsan változó terekre $\boldsymbol{E}$ nem áll elő valamely potenciál gradienseként, ugyanis

$$\nabla \boldsymbol{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{2.32}$$

általánosan igaz, azonban a II. vákuumbeli ME-be helyettesítve

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{2.33}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \tag{2.34}$$

tehát nem $\boldsymbol{E}$, hanem a fenti kombináció áll elő potenciál gradienseként. Lassan változó $\boldsymbol{A}$ esetén azonban valóban visszakapjuk a Coulomb-törvényt.

A meglepő az, hogy a lassú terekre érvényes törvények eredeti formájukban érvényüket vesztik, de a ME alakjában változatlanul kiterjeszthetőnek bizonyultak gyors töltésekre is.

2.7. Mértékinvariancia

Mértéktranszformáció:

$$\left.\begin{array}{lcl} \boldsymbol{A} + \nabla\chi & \longrightarrow & \boldsymbol{A} \\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} & \longrightarrow & \varphi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \text{ változatlan} \tag{2.35}$$

Megfelelő χ választással különféle feltételek teljesíthetők a potenciálokra, miközben $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ invariáns. Két gyakran használt mérték:

- Coulomb mérték

$$\nabla \boldsymbol{A} = 0 \tag{2.36}$$

ekkor a "sztatikus" $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$ potenciálformula fennmarad, de $\boldsymbol{E}$-t a (2.34) alapján állítjuk elő

- Lorentz mérték

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{2.37}$$

a potenciál nem "sztatikus", $\Delta\varphi - c^{-2}\partial^2\varphi/\partial^2 t = -4\pi\varrho$.

2.8. Lorentz erő

A Lorentz erő formulája

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{2.38}$$

Ezt tekinthetjük erőtörvénynek, de felfoghatjuk a terek mérési utasításaként is.

2.9. A Maxwell-egyenletek összefoglalva

I. anyagi

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} = 4\pi\varrho, \tag{2.39}$$

I. vákuum

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B} = 0, \tag{2.40}$$

II. vákuum

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \tag{2.41}$$

II. anyagi

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \tag{2.42}$$

2.10. Közegek

Bontsuk szét a töltés- és áramsűrűséget két részre. Ez lehet önkényes, célszerű azonban így megkülönböztetni a közegekben polarizációval keltett ϱ_{int} ill. a közvetlenül figyelemmel kísért ϱ_{ext} töltéseket és a megfelelő áramokat

$$\varrho = \varrho_{\mathrm{int}} + \varrho_{\mathrm{ext}}, \tag{2.43}$$

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{int}} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{ext}}, \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial\varrho_{\mathrm{int/ext}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j}_{\mathrm{int/ext}} = 0. \tag{2.45}$$

Vezessük be a $\boldsymbol{D}$ és $\boldsymbol{H}$ mennyiségeket

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla D} &= 4\pi \varrho_{\rm ext} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\rm ext}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

és a polarizációt jellemző $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{M}$ vektorokat

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{\nabla} P = -\varrho_{\rm int} \\ &\Rightarrow \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_{\rm int} \end{aligned} \tag{2.47}$$

- izotróp közeg

$$\boldsymbol{D}||\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B}||\boldsymbol{H} \tag{2.48}$$

- lineáris (mátrixok transzformálják a tereket egymásba)

$$\boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{H} \tag{2.49}$$

- lineáris és izotróp (a megfelelő terek arányosak)

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \epsilon\hat{\mathbf{1}}, \quad \hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu\hat{\mathbf{1}} \tag{2.50}$$

2.11. Mértékegységek

- CGS (ezt használtuk)
  - A Coulomb törvényben fellépő faktor 1, a Biot–Savart-ban $1/c$.
  - A ME-ben c-k és 4π-k jelennek meg, a vákuumban ϵ és μ egységnyi.
  - A terek dimenziója azonos.
- SI
  - A vákuumot a dimenziós ϵ_0 és μ_0 állandók jellemzik, a Coulomb törvényben az $1/4\pi\epsilon_0$ faktor jelenik meg, a Biot–Savart-ban $\mu_0/4\pi$.
  - A fénysebesség $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.
  - Az $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ és $\boldsymbol{H}$-val felírt ME állandó faktorokat nem tartalmaznak.
  - dim[$\boldsymbol{E}$]=dim[$c\boldsymbol{B}$], dim[$\boldsymbol{H}$]=dim[$c\boldsymbol{D}$].

3. Klasszikus kontinuum mechanika, téregyenletek

3.1. Hamilton elv terekre

Dinamikai változók: $\phi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$, ahol α-val „könyveljük” az összes teret. A kontinuum mechanikát elgondolhatjuk úgy, hogy adott α-ra és az $\boldsymbol{r}$ helyen a pontmechanikában szokásos módon a $\phi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ időfüggő trajektóriát vizsgáljuk. Azt várjuk, hogy a kontinuumban a közeli helyek trajektóriái általában egy ideig közel maradnak. Természetesen szingularitások is felléphetnek — ez a konkrét megoldásból kiderül.

Lokális térelmélet: a Lagrange függvény előáll egyszeres térintegrál alakban, amelyben az integrandus a tértől és deriváltjaitól függ. Tegyük fel, hogy legfeljebb első deriváltakat tartalmaz

$$L = \int \mathrm{d}^3 r\, \Lambda(\phi_\alpha, \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial r_a}, \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t}, r_a, t), \tag{3.1}$$

ahol Λ az ún. Lagrange sűrűségfüggvény. Ennek a pontmechanikai analógiáját a következőképpen érzékeltethetjük. Osszuk a teret kicsiny $\Delta^3 r$ térfogatelemekre, s tegyük fel, hogy Λ csak a tereket tartalmazza, de hely szerinti deriváltjaikat nem. Ekkor $\Delta L = \Lambda\Delta^3 r$ az $\boldsymbol{r}$-beli változó Lagrange függvénye. Ha első deriváltak is fellépnek,

akkor ezeket differenciákkal helyettesítve látjuk, hogy $\Lambda\Delta^3 r$ a szomszédos pontokbeli helyek tereit is tartalmazza, $L = \sum \Delta L$-ben tehát a különböző helyek terei közötti kölcsönhatások is megjelennek — a kontinuummechanikával éppen ezt kívánjuk leírni.

A hatás

$$S = \int L\, \mathrm{d}t = \int \Lambda\, \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}t \tag{3.2}$$

A mozgásegyenlet az S hatás extremumfeltételéből származik.

3.2. Négyes jelölés

„Négyes” koordináták (nem relativisztikus a mechanika, csupán a jelölés egyszerűsítése a cél)

$$r_0 = t, \qquad r_a = [\boldsymbol{r}]_a \quad \Rightarrow \quad r_i = [(t,\boldsymbol{r})]_i. \tag{3.3}$$

Az $i,j,k\dots$ indexek 0-tól 3-ig futnak, míg az $a,b,c\dots$ indexek 1-től 3-ig. A gradiens röviden

$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial r_i}. \tag{3.4}$$

Ezzel a jelöléssel a hatást tömör alakba írhatjuk

$$S = \int L\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}^4 r\ \Lambda(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,i}, r_j). \tag{3.5}$$

3.3. Euler–Lagrange egyenletek (ELE)

A teret variáljuk: $\phi + \delta\phi \to \phi$, rögzített r_i koordináták mellett (az $\boldsymbol{r}, t$ térkoordinátákat nem variáljuk), s ezért $(\delta\phi_\alpha)_{,i} = \delta(\phi_{\alpha,i})$. A hatás változása

$$\begin{aligned}\delta S = \int \mathrm{d}^4 r\ \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,i}}(\delta\phi_\alpha)_{,i}\right] = \int \mathrm{d}^4 r\ \delta\phi_\alpha \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_\alpha} - \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,i}}\right)_{,i}\right] \\ + \int \mathrm{d}^3 r\, \delta\phi_\alpha \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,0}}\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \oint \delta\phi_\alpha \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,a}} \mathrm{d}A_a.\end{aligned} \tag{3.6}$$

A Gauss tételt alkalmaztuk, a 2. sorban a két tag összege a 4d térbeli zárt 3d felületre vett integrál. A kezdeti és végpontokban rögzítjük a teret, ezért az első tag zérus. Feltesszük, hogy a második tag is nulla, ez teljesül pl. akkor, ha olyan ϕ terekre szorítkozunk, amelyek véges térrészben különböznek nullától vagy elég gyorsan csengenek le a végtelenben.

Így kapjuk a térfogati ELE-et

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_\alpha} = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,i}}\right)_{,i} = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,t}}\right)_{,t} + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,a}}\right)_{,a}. \tag{3.7}$$

Az idstruktúraőderiváltat a szemléletesség kedvéért $f_{,0}$ helyett $f_{,t}$-vel jelöltük. N.B: Ha magasabb deriváltak is fellépnek a Lagrange sűrűségfüggvényben, akkor a hatás variációjakor a Gauss tételt ismételten kell alkalmazni, és emiatt az ELE-ben további tagok jelennek meg.

Funkcionál derivált: Az a függvény, amely a funkcionál megváltozásában a függvény megváltozását (variációját) szorozza az integrálban. Azaz a

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4 r\, \frac{\delta S}{\delta\phi}(r_j)\, \delta\phi(r_j) \tag{3.8}$$

kifejezésben a funkcionál derivált $\frac{\delta S}{\delta\phi}(r_j)$. A fenti ELE a hatásnak az egyes terek szerinti funkcionálderiváltjai eltűnését írja elő.

3.4. Megmaradási tételek, energia-impulzus tenzor

Tegyük fel, hogy megoldottuk a problémát, azaz ismerjük a $\phi_\alpha(r_i)$ fizikailag megvalósuló "pályák"-at. A pályamenti Lagrange sűrűségfüggvény

$$\Lambda(r_i) = \Lambda(\phi_\alpha(r_i), \phi_{\alpha,j}(r_i), r_i) \tag{3.9}$$

Deriváljuk $\Lambda(r_i)$-t (az argumentum nélküli Λ-val a $\Lambda(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,j}, r_i)$-t rövidítjük, és az alábbiakban a pályák behelyettesítése a deriválások után magától értedődik)

$$\Lambda(r_i)_{,i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_\alpha}\phi_{\alpha,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}}\phi_{\alpha,j,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i}. \tag{3.10}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

[derivált $\Lambda(r_i)$ teljes r_i függése szerint] [derivált Λ explicit r_i függése szerint]

E fejezetben kivételesen megkülönböztetjük a $\Lambda(r_i)_{,i}$ és $\partial\Lambda/\partial r_i$ mennyiségeket. A (3.10) jobboldalán az első tagba behelyettesítjük az ELE-t

$$\Lambda(r_i)_{,i} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}}\right)_{,j}\phi_{\alpha,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}}\phi_{\alpha,j,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} = \left(\phi_{\alpha,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}}\right)_{,j} + \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i}, \tag{3.11}$$

ahol ", j" teljes r_j függés szerinti derivált. Bevezetjük az energia-impulzus tenzort (EIT)

$$T_{ij} = \phi_{\alpha,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,j}} - \delta_{ij}\Lambda = \begin{bmatrix} e & \boldsymbol{j}_\mathrm{e} \\ -\boldsymbol{p} & -\mathbf{T} \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Ez a $\phi_\alpha(r_i)$ pályák behelyettesítése után csak a koordinátáktól függ, $T_{ij}(r_k)$, s a divergenciája a fentiek alapján

$$T_{ij,j} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} = (\omega, -\boldsymbol{f}). \tag{3.13}$$

A (3.12) pontmechanikai analógiája az $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ Lagrange függvényből kapható Hamilton függvény

$$H = \dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L, \tag{3.14}$$

amelyre a megoldás behelyettesítése után kapjuk

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.15}$$

A (3.12)-ben bevezetett jelölésekkel (3.13) részletesen

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j}_\mathrm{e} = \omega, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{T} = \boldsymbol{f}. \tag{3.16}$$

Tenzorra a divergencia a második indexben hat. Ezek kontinuitási egyenlet alakúak, ezért a jobboldalakat tekinthetjük "forrás"-nak, amelyek (3.13) szerint Λ explicit koordinátafüggésének tulajdoníthatók. Integrális mennyiségek

$$E = \int \mathrm{d}^3 r\, e, \qquad \boldsymbol{P} = \int \mathrm{d}^3 r\, \boldsymbol{p}. \tag{3.17}$$

Ha Λ nem függ explicite az időtől (ill. helytől), akkor $E =$ áll. (ill. $\boldsymbol{P} =$ áll.), emiatt e-t energiasűrűségnek, $\boldsymbol{p}$-t impulzussűrűségnek tekinthetjük. A mérlegegyenletek nem változnak, ha az EIT-t olyan taggal egészítjük ki, amelynek divergenciája azonosan zérus

$$T_{ij} + \Delta T_{ij} \longrightarrow T_{ij}, \tag{3.18}$$

ahol

$$\Delta T_{ij,j} = 0, \tag{3.19}$$

például, ha az U_{ijk} antiszimmetrikus két indexben, $U_{ijk} = -U_{ikj}$, akkor ennek egy divergenciája megfelel

$$\Delta T_{ij} = U_{ijk,k} \quad \Rightarrow \quad \Delta T_{ij,j} = U_{ijk,jk} = 0. \tag{3.20}$$

Ez azt mutatja, hogy az energia- és impulzussűrűség nem egyértelműen definiált. Ha azonban U a vizsgált térrész felületén eltűnik, akkor az integrális energia és impulzus kiegészítő tagjait felületi integrállá alakíthatva láthatjuk, hogy azok is zérusak. A teljes energia és impulzus az EIT ilyen módosításával szemben tehát invariáns.

3.5. Hamilton-egyenletek

Pontmechanikai analógia

$$q(t) \sim \phi_\alpha(\boldsymbol{r}, t) \qquad \dot{q}(t) \sim \phi_{\alpha,t}(\boldsymbol{r}, t) \tag{3.21}$$

Vezessük be a Π_α kanonikus impulzussűrűséget

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \sim \Pi_\alpha = \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,t}} \equiv \frac{\delta L}{\delta \phi_{\alpha,t}}. \tag{3.22}$$

Ebből $\phi_{\alpha,t}$-t kifejezve kapjuk

$$\phi_{\alpha,t}(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, \Pi_\alpha, r_i). \tag{3.23}$$

Ahol a pontmechanikában a Lagrange függvényt deriváltuk a dinamikai változó szerint, ott most funcionális deriváltat használunk.

Emlékeztetőül: funcionál derivált a szokásos deriválás, ha

$$F[g(x)] = \int \mathrm{d}x f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta F}{\delta g} = f'(g(x)), \tag{3.24}$$

ha pedig f a g deriváltját is tartalmazza, akkor a funkcionális derivált kiszámításához parciális integrálást alkalmazunk (a felületi tag eltűnését feltesszük, például a határon a $\delta g(x) = 0$ feltétellel).

$$F[g(x)] = \int \mathrm{d}x f(g(x), g'(x)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta F}{\delta g} = \frac{\partial f}{\partial g} - \left(\frac{\partial f}{\partial g'}\right)', \tag{3.25}$$

A pontmechanikai Legendre transzformáció analgonja

$$H = p\dot{q} - L \sim \chi = \Pi_\beta \phi_{\beta,t} - \Lambda, \tag{3.26}$$

ekkor a Hamilton függvény

$$H = \int \mathrm{d}^3 r\, \chi. \tag{3.27}$$

Vegyük észre, hogy χ a pálya mentén $T_{00} = e$, azaz valóban energiasűrűség, H pedig az

integrális energia. Mi minek a függvénye? Részletesen jelölve a változókat

$$\begin{aligned}\chi(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, \Pi_\alpha, r_i) =& \Pi_\beta \phi_{\beta,t}(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, \Pi_\alpha, r_i) \\ & - \Lambda(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, \phi_{\alpha,t}(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,b}, \Pi_\alpha, r_j), r_i).\end{aligned} \tag{3.28}$$

Hamilton egyenletek

$$\left.\frac{\delta H}{\delta \Pi_\alpha}\right|_{\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}} = \left.\frac{\partial \chi}{\partial \Pi_\alpha}\right|_{\phi_\alpha, \phi_{\alpha,a}, r_i} = \phi_{\alpha,t} + \Pi_\beta \frac{\partial \phi_{\beta,t}}{\partial \Pi_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\beta,t}} \frac{\partial \phi_{\beta,t}}{\partial \Pi_\alpha} = \phi_{\alpha,t}. \tag{3.29}$$

Variáljuk most ϕ-t midőn Π változatlan

$$\begin{aligned}\delta H|_{\Pi_\alpha} &= \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_\alpha} \delta\phi_\alpha + \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_{\alpha,a}} \delta\phi_{\alpha,a} = \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_\alpha} \delta\phi_\alpha + \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_{\alpha,a}} \left(\delta\phi_\alpha\right)_{,a} \\ &= \int \frac{\partial \chi}{\partial \phi_\alpha} \delta\phi_\alpha + \int \left(\frac{\partial \chi}{\partial \phi_{\alpha,a}} \delta\phi_\alpha\right)_{,a} - \int \left(\frac{\partial \chi}{\partial \phi_{\alpha,a}}\right)_{,a} \delta\phi_\alpha.\end{aligned} \tag{3.30}$$

A második tag felületi integrállá alakítható s ezért eltűnik. (3.28,3.22) alapján kapjuk

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta H}{\delta\phi_\alpha}\right|_{\Pi_\alpha} =& \frac{\partial\chi}{\partial\phi_\alpha} - \left(\frac{\partial\chi}{\partial\phi_{\alpha,a}}\right)_{,a} = \Pi_\beta\frac{\partial\phi_{\beta,t}}{\partial\phi_\alpha} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_\alpha} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\beta,t}}\frac{\partial\phi_{\beta,t}}{\partial\phi_\alpha} \\ & - \left(\Pi_\beta\frac{\partial\phi_{\beta,t}}{\partial\phi_{\alpha,a}} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,a}} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\beta,t}}\frac{\partial\phi_{\beta,t}}{\partial\phi_{\alpha,a}}\right)_{,a} \\ =& -\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_\alpha} + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,a}}\right)_{,a} \underset{\mathrm{ELE}}{=} -\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\alpha,t}}\right)_{,t} = -\Pi_{\alpha,t}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Összefoglalva, a Hamilton egyenletek alakja

$$\left.\frac{\delta H}{\delta\Pi_\alpha}\right|_{\phi_\alpha,\phi_{\alpha,a}} = \phi_{\alpha,t}, \qquad \left.\frac{\delta H}{\delta\phi_\alpha}\right|_{\Pi_\alpha} = -\Pi_{\alpha,t}. \tag{3.32}$$

Hasonlóan a pontmechanikához, ezek előnye, hogy első deriváltakat tartalmaznak.

3.6. Rugalmas hullámok terjedése egy dimenzióban

3.6.1. Húr transzverzális rezgései

Vizsgáljuk egy kellően nagy F erővel előfeszített húr kis transzverzális síkbeli rezgéseit. Az $x = 0$ és $x = \ell$ pontokban rögzített húr alakja legyen $u(x,t)$, ekkor az aktuális hossza

$$\ell' = \int_0^\ell \mathrm{d}x\sqrt{1 + u_{,x}^2}. \tag{3.33}$$

Kis rezgések esetén a feszítő erő közel állandó, továbbá a gyököt sorba fejthetjük, ezért a nyugalmi állapothoz képest a potenciális energia változása

$$V = F(\ell' - \ell) \approx \frac{F}{2}\int_0^\ell \mathrm{d}x\, u_{,x}^2. \tag{3.34}$$

A teljes kinetikus energia (itt μ a hosszegységre eső tömeg)

$$T = \frac{\mu}{2}\int_0^\ell \mathrm{d}x\, u_{,t}^2. \tag{3.35}$$

Tehát a hatás

$$S = \int \mathrm{d}t(T - V) = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}x\,\Lambda, \tag{3.36}$$

ahol a Lagrange sűrűségfüggvény

$$\Lambda = \frac{\mu}{2}u_{,t}^2 - \frac{F}{2}u_{,x}^2, \tag{3.37}$$

s innen az ELE

$$u_{,t,t} = \frac{F}{\mu}u_{,x,x}. \tag{3.38}$$

Ez az 1+1 dimenziós hullámegyenlet, melyben a hullám sebessége

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}, \tag{3.39}$$

ahol σ a feszültség és ϱ a húr (térfogati) sűrűsége. Az EIT tenzorának elemei

$$\begin{aligned} e &= \chi = \frac{\mu}{2}u_{,t}^2 + \frac{F}{2}u_{,x}^2 && (3.40)\\ j_{\mathrm{e}} &= -Fu_{,t}u_{,x} && (3.41)\\ p &= -\mu u_{,t}u_{,x} && (3.42)\\ T &= e && (3.43)\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $j_{\mathrm{e}} = c^2 p$.

3.1. Gyakorló feladat. *Számítsuk ki az energia-impulzus tenzor elemeit $u(x,t) = f(x \mp ct)$ haladó hullám esetére.*

3.6.2. Longitudinális hullámok

Tekintsünk egy ℓ hosszú, A keresztmetszetű rudat, amelyben $u(x,t)$ longitudinális elmozdulástér jöhet létre. Az x kis Δx környezetének relatív megnyúlása

$$\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{F(x)}{E\,A}, \tag{3.44}$$

ahol E a Young modulus és $F(x)$ a hossztengely irányú erő. A hosszegységre eső potenciális energiából a teljes potenciál megkapható

$$\Delta V = \frac{1}{2}\Delta u\, F = \frac{(\Delta u)^2\, A\, E}{2\Delta x} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{A\, E}{2}\int_0^\ell \mathrm{d}x\, u_{,x}^2. \tag{3.45}$$

A hatás

$$S = \int \mathrm{d}t(T - V) = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}x\, \Lambda, \tag{3.46}$$

$$\Lambda = \frac{\mu}{2}u_{,t}^2 - \frac{A\, E}{2}u_{,x}^2, \tag{3.47}$$

és az ELE

$$u_{,t,t} = \frac{A\, E}{\mu}u_{,x,x} = \frac{E}{\varrho}u_{,x,x}. \tag{3.48}$$

Újból az $1+1$ dimenziós hullámegyenletet kaptuk, melyből a

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \tag{3.49}$$

hangsebesség leolvasható. N.B.: A (3.39,3.49) fázissebességeket dimenzionális megfontolásból is megkaphatjuk numerikus szorzó erejéig.

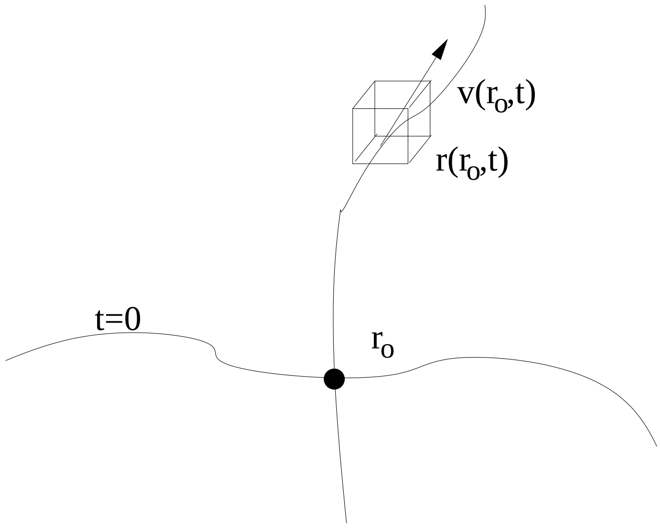
3.1. Házi feladat. *Írjuk fel a hullámmozgás Hamilton egyenleteit (10%).*

4. Emlékeztető hidrodinamikából

4.1. Koordináták

(a) Lagrange koordináták A koordináta a folyadékelem pályájának kezdeti feltétele, a $t = 0$ időpillanatbeli $\boldsymbol{r}_0$ helyvektor. Ez az $\boldsymbol{r}$ helyen lévő részecske „azonosító”-ja:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0, t), \quad \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0, 0), \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0, t), \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0, t). \tag{4.1}$$



5. ábra. A Lagrange koordináták a hidrodinamikában. A folyadék tömegelemek pályáját követjük.

(b) Euler koordináták

A koordináta a folyadékelem által aktuálisan elfoglalt $\boldsymbol{r}$ hely, a sebességteret ennek

függvényében keressük

$$\boldsymbol{v}_{\text{Euler}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{v}_{\text{Lagrange}}(\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r},t),t). \tag{4.2}$$

Itt kihasználtuk, hogy $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,t)$-ből invertálással $\boldsymbol{r}_0$ megkapható, azaz a pillanatnyi $\boldsymbol{r}$ helyen levő tömegelem kezdeti $\boldsymbol{r}_0$ pozíciója visszakövethető. Ez akkor teljesül, ha a sűrűség nem végtelen, azaz a Jacobi mátrix determinánsa nem szinguláris. Megfordítva

$$\boldsymbol{v}_{\text{Lagrange}}(\boldsymbol{r}_0,t)=\boldsymbol{v}_{\text{Euler}}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,t),t). \tag{4.3}$$

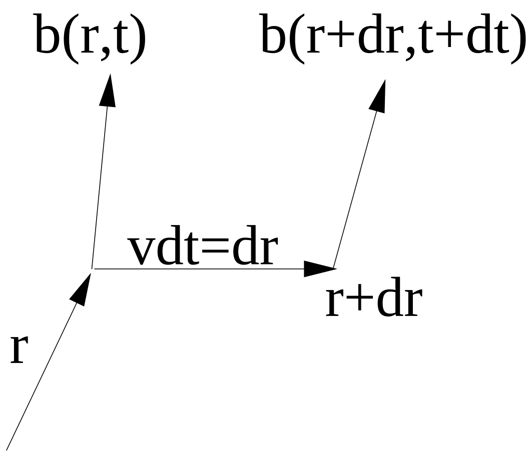
Pályamenti („totális") derivált: a Lagrange képbeli $\boldsymbol{b}_{\text{Lagrange}}(\boldsymbol{r}_0,t)$ mező időderiváltja Euler képben. Azaz

$$\frac{\partial\boldsymbol{b}_{\text{Lagrange}}(\boldsymbol{r}_0,t)}{\partial t}=\frac{\partial\boldsymbol{b}_{\text{Euler}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}_{\text{Euler}}(\boldsymbol{r},t), \tag{4.4}$$

ennek tömör jelölése euleri mezőre

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}. \tag{4.5}$$

A második tag neve konvektív derivált. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ nem függvénytani értelemben vett teljes idővderivált.



6. ábra. A konvektív derivált illusztrációja

4.2. Euler egyenlet

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \varrho(\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{f} \tag{4.6}$$

4.3. Kontinuitás

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j} = 0 \qquad (\boldsymbol{j} = \varrho \boldsymbol{v}) \tag{4.7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}\varrho = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = 0 \tag{4.8}$$

Inkompresszibilitás: a pálya mentén a sűrűség állandó

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = 0 \tag{4.9}$$

4.4. Impulzusmérleg

Impulzussűrűség

$$\boldsymbol{p} = \varrho \boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}. \tag{4.10}$$

A kontinuitási és az Euler egyenlet alapján

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} &= \frac{\partial \varrho}{\partial t}\boldsymbol{v} + \varrho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\nabla}\varrho\boldsymbol{v}) - \varrho(\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{f} = \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\underbrace{(p\mathbf{I} + \varrho\boldsymbol{v}\circ\boldsymbol{v})}_{\mathbf{T}\text{ impulzus áram sűrűség}} + \boldsymbol{f} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Lagrange sűrűségfüggvényünk s így térelméletünk még nincs, de impulzusáram sűrűséget már tudtunk definiálni.

4.5. Termodinamika

$M =$ áll. tömegű kis tömegegységre:

$$\mathrm{d}E = -p\mathrm{d}V + T\mathrm{d}S \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\frac{E}{M} = -p\mathrm{d}\frac{V}{M} + T\mathrm{d}\frac{S}{M} \tag{4.12}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\frac{\epsilon}{\varrho} = -p\mathrm{d}\frac{1}{\varrho} + T\mathrm{d}\frac{s}{\varrho}, \tag{4.13}$$

ahol ϵ, s térfogatra vonatkoztatott sűrűségek.
Adiabatikus folyamatra a pálya mentén:

$$\mathrm{d}\frac{\epsilon}{\varrho} = -p\mathrm{d}\frac{1}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \frac{\epsilon}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} \tag{4.14}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\epsilon + p}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{(\epsilon + p)}_{\substack{\text{entalpia} \\ w}}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} \tag{4.15}$$

Adiabaticitás: a pálya mentén

$$\frac{\mathrm{d}\frac{s}{\varrho}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{4.16}$$

Izentropikusság: a mezőre

$$\mathrm{d}\frac{s}{\varrho} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{\varrho} = \text{térben és időben áll.} \tag{4.17}$$

Izentropikus az áramlás, ha a kezdetben homogén fajlagos entrópiájú közeg állapotváltozása adiabatikus. Ilyenkor a termodinamikáról megfeledkezve rugalmas alakváltozásként tekinthetjük a folyadékelem sorsát.

4.6. Energiamérleg

Kinetikus energiasűrűség:

$$\tau = \frac{\varrho}{2}v^2 \tag{4.18}$$

Felhasználva a (4.6) és (4.8) egyenleteket:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{v^2}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{v^2}{2}\boldsymbol{\nabla}(\varrho \boldsymbol{v}) - \varrho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla} p + \underbrace{\boldsymbol{v}\boldsymbol{f}}_{\omega} = \\ &= -\frac{v^2}{2}\boldsymbol{\nabla}(\varrho \boldsymbol{v}) - \frac{\varrho}{2}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla} v^2 - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}p + p\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \omega = \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{v}\left(\varrho\frac{v^2}{2} + p\right)\right) + \omega + p\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}(\tau + p)) + \omega + p\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{4.19}$$

A belső energia időbeli változása a pályamenti deriváltból visszaszámolva

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}\epsilon = -\underbrace{(p+\epsilon)}_{w}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}\epsilon = -\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\epsilon) - p\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} \tag{4.20}$$

Ha összeadjuk a fenti két egyenletet, akkor az

$$e = \epsilon + \tau \tag{4.21}$$

jelöléssel az alábbi mérlegegyenletet kapjuk

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\underbrace{(\boldsymbol{v}(e+p))}_{\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}} + \omega. \tag{4.22}$$

Vegyük észre, hogy az energiaáram sűrűség nem (energiasűrűség × sebesség) alakú, hanem az extra $\boldsymbol{v}p$ tag is megjelenik!

4.1. Házi feladat. *Vezessük le a (4.22) mérlegegyenletet mikroszkopikusan, azaz Dirac-deltákkal kifejezett sűrűségek segítségével (25%).*

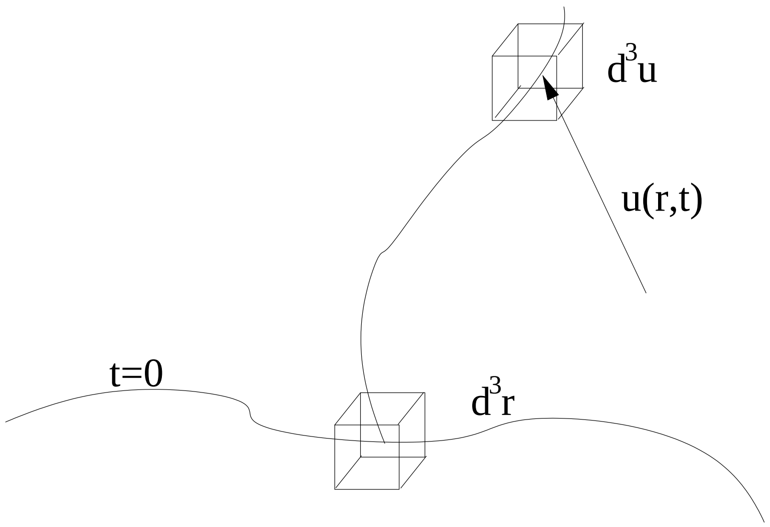
4.7. Lagrange koordináták átjelölése

Legyen az aktuális hely ill. a kezdeti pozíció

$$\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_0 \tag{4.23}$$

azaz $\boldsymbol{u}$ a dinamikai változónk, korábbi jelöléssel $\boldsymbol{r}$, és $\boldsymbol{r}$-el a korábbi $\boldsymbol{r}_0$-t jelöljük, ezért

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) \tag{4.24}$$



7. ábra. A Lagrange koordináták az új jelöléssel

4.8. Kontinuitás Lagrange koordinátákkal

$$\varrho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}^3u = \underbrace{\varrho(\boldsymbol{r},0)}_{\varrho_0(\mathbf{r})}\mathrm{d}^3r \tag{4.25}$$

Bevezetve a $\mathbf{J}$ Jacobi-mátrixot és annak J determinánsát

$$J_{ab} = u_{a,b} = \frac{\partial u_a}{\partial r_b}, \qquad J^{-1}_{ab} = \frac{\partial r_a}{\partial u_b}, \qquad J = \det\mathbf{J} \tag{4.26}$$

kapjuk

$$\varrho\mathrm{d}^3u = \varrho J\mathrm{d}^3r = \varrho_0\mathrm{d}^3r \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{\varrho_0(\boldsymbol{r})}{J(\boldsymbol{r},t)} \tag{4.27}$$

4.9. Mozgásegyenlet Lagrange koordinátákkal

A Newton egyenlet egy tömegelemre, ha nincs külső erő

$$\varrho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\bigg|_r = -\boldsymbol{\nabla}_u p \quad \Rightarrow \quad \varrho\frac{\partial v_a}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r_b}\frac{\partial r_b}{\partial u_a}. \tag{4.28}$$

Innen az Euler egyenlet Lagrange koordinátás alakja

$$\varrho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -(\boldsymbol{\nabla}p)J\mathbf{J}^{-1}. \tag{4.29}$$

A $J\mathbf{J}^{-1}$ a J determinánsnak a mátrixelemek szerinti deriválásával állítható elő. A Jacobi determináns

$$J = \frac{1}{3!}\epsilon_{abc}\epsilon_{def}J_{ad}J_{be}J_{cf}, \tag{4.30}$$

ahol ismétlődő indexekre összegzünk. Innen

$$\frac{\partial J}{\partial J_{ad}} = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\epsilon_{def}J_{be}J_{cf} = JJ^{-1}_{da}. \tag{4.31}$$

Valóban, ha a középső kifejezést J_{ag}-vel szorozzuk és a-ra összegzünk, akkor $J\delta_{dg}$-t kapunk. Képezzük a divergenciát

$$\frac{\partial}{\partial r_d}\frac{\partial J}{\partial J_{ad}} = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\underbrace{\epsilon_{def}}_{\text{antiszimm.}}J_{be}\underbrace{\frac{\partial^2 u_c}{\partial r_d \partial r_f}}_{\text{szimm.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}(J\mathbf{J}^{-1}) = 0 \tag{4.32}$$

Innen kapjuk a (4.29) mozgásegyenlettel ekvivalens alakot

$$\varrho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}(pJ\mathbf{J}^{-1}) \tag{4.33}$$

5. A hidrodinamika mint térelmélet (Lagrange koordinátákkal)

5.1. Hamilton-elv

Pontmechanikából

$$L = T - V, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} T &= \int \mathrm{d}^3u\frac{1}{2}\varrho(\boldsymbol{r},t)v^2 = \int \mathrm{d}^3r\,\varrho_0(\boldsymbol{r})\frac{v^2}{2}, \\ V &= \int \mathrm{d}^3u\,\varrho\epsilon = \int \mathrm{d}^3r\,\varrho_0\epsilon. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Új jelölés: ϵ mostantól a fajlagos, azaz tömegegységre vonatkoztatott belső energia (az energiasűrűség ezzel $\varrho\epsilon$). A térkoordináta a kezdeti időpillanatbeli $\boldsymbol{r}$, a dinamikai változó pedig az $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ pálya nyaláb. Ezek alapján propozíciónk a Lagrange sűrűségfüggvényre

$$\Lambda = \varrho_0\left(\frac{v^2}{2} - \epsilon\right). \tag{5.3}$$

5.2. Termodinamika

Adiabatikus folyamatra a pálya mentén a tömegelem entrópiája állandó, azaz a fajlagos entrópia csak a kezdeti pozíciótól függ, az időtől nem

$$s(\boldsymbol{r}, t) = s_0(\boldsymbol{r}). \tag{5.4}$$

Tegyük fel, hogy adva van az állapotegyenlet

$$\epsilon = \epsilon(\varrho, s) = \epsilon\left(\frac{\varrho_0}{J}, s_0\right). \tag{5.5}$$

Az ELE-hez szükségünk lesz az energia deriváltjára az $\boldsymbol{u}$ elmozdulástér gradiense, azaz a Jacobi mátrix elemei szerint. Ehhez felidézzük az I. főtételt, melynek differenciális alakja a mezőkre, vagyis különböző tömegelemek összehasonlításakor is igaz

$$\mathrm{d}\epsilon = \frac{p\,\mathrm{d}\varrho}{\varrho^2} + T\mathrm{d}s, \tag{5.6}$$

a pálya mentén pedig az adiabatikusság miatt

$$\mathrm{d}\epsilon = \frac{p\,\mathrm{d}\varrho}{\varrho^2}. \tag{5.7}$$

5.3. Euler–Lagrange egyenletek

$$\Lambda(u_a, u_{a,b}, u_{a,t}, r_a, t) = \varrho_0\left(\frac{v^2}{2} - \epsilon\left(\frac{\varrho_0}{J}, s_0\right)\right). \tag{5.8}$$

A dinamikai tér az $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ pillanatnyi pozíció. A Λ változói hol fordulnak elő? Az $\boldsymbol{r}$ koordináta a kezdeti $\varrho_0(\boldsymbol{r})$ és $s_0(\boldsymbol{r})$ terekben lép fel, a t idő és az $\boldsymbol{u}$ tér expliciten nem szerepel, a sebesség $v_a = u_{a,t}$, és a $u_{a,b}$ gradiens elemei a J determinánson keresztül jelennek meg. A Λ deriváltjai

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_a} = 0, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,t}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial v_a} = \varrho_0 v_a, \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,b}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial J_{ab}} = -\varrho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial J_{ab}} \frac{\varrho_0}{J} = \frac{\varrho_0^2}{J^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \varrho} J J_{ba}^{-1} = \varrho^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \varrho} J J_{ba}^{-1} = pJJ_{ba}^{-1}. \tag{5.11}$$

Az Euler–Lagrange egyenlet

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_a} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,t}} + \frac{\partial}{\partial r_b} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,b}}, \tag{5.12}$$

amelybe a fent kiszámított deriváltakat behelyettesítve nyerjük

$$\varrho_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r_b} pJJ^{-1}_{ba}. \tag{5.13}$$

Mivel visszakaptuk a korábban levezetett (4.33) mozgásegyenletet, láthatjuk, hogy jól sejtettük meg a Lagrange sűrűségfüggvényt.

5.4. Energia-impulzus tenzor

$$T_{ij} = u_{a,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,j}} - \delta_{ij} \Lambda, \tag{5.14}$$

$$e = T_{00} = v_a \frac{\partial \Lambda}{\partial v_a} - \Lambda = \varrho_0 \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon \right), \tag{5.15}$$

$$[\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}]_a = T_{0a} = v_b \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{b,a}} = v_b pJJ^{-1}_{ab} = pJ[\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{v}]_a, \tag{5.16}$$

$$[\boldsymbol{p}]_a = T_{a0} = -u_{b,a} \frac{\partial \Lambda}{\partial v_b} = -J_{ba} \varrho_0 v_b = -\varrho_0 [\boldsymbol{v}\mathbf{J}]_a, \tag{5.17}$$

$$T_{ab} = -u_{c,a} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{c,b}} + \delta_{ab} \Lambda = -J_{ca} pJJ^{-1}_{bc} + \delta_{ab} \Lambda = \delta_{ab}(\Lambda - pJ). \tag{5.18}$$

Az energiasűrűség megegyezik a korábban kiszámítottal, de az EIT többi eleme különbözik az euleri formuláktól! Ez nem meglepő, hiszen a lagrange-i koordináta

- nem az aktuális, hanem a kezdeti $\boldsymbol{r}$ hely, s az áramok divergenciája eszerint képzendő
- expliciten megjelenik a Lagrange sűrűségfüggvényben akkor is, ha nincs külső potenciál, ezért az impulzusmérleg forrást is tartalmaz.

5.5. Energiamérleg

A (3.16) mérlegegyenletek közül az energiára vonatkozó

$$\varrho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon \right) + \boldsymbol{\nabla} \left(pJ\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{v} \right) = - \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right|_u = 0. \tag{5.19}$$

Áttérve Euler koordinátákra

$$\varrho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon \right) + \boldsymbol{\nabla}_u (p\boldsymbol{v}) = 0. \tag{5.20}$$

5.1. Gyakorló feladat. *Mutassuk meg, hogy ez ekvivalens a (4.22) energiamérleggel.*

5.6. Impulzusmérleg

$$\varrho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}\mathbf{J}) + \boldsymbol{\nabla}(pJ) - \boldsymbol{\nabla}\Lambda = - \left.\boldsymbol{\nabla}\Lambda\right|_u . \tag{5.21}$$

Mivel Λ a $\varrho_0(\boldsymbol{r})$-en és az $s_0(\boldsymbol{r})$-en keresztül függ expliciten a koordinátáktól, a $\nabla_a\Lambda|_u$ ezek szerinti deriváltakat tartalmazza. A következő mellékszámításokat végezzük

$$v_b(J_{ba})_{,t} = v_b u_{b,a,t} = v_b v_{b,a} = \frac{1}{2}\nabla_a v^2, \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} \nabla_a\Lambda &= \nabla_a\Lambda|_u + \varrho_0\frac{1}{2}\nabla_a v^2 - \varrho_0\frac{\partial\epsilon}{\partial\varrho}\varrho_0\nabla_a\frac{1}{J} \\ &= \nabla_a\Lambda|_u + \varrho_0\frac{1}{2}\nabla_a v^2 + p\nabla_a J. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Az (5.21) mérlegegyenlet a behelyettesítések után

$$\varrho_0 v_{b,t} J_{ba} = -J\nabla_a p, \tag{5.24}$$

ez éppen az (5.13) mozgásegyenlet.

5.7. Hamilton egyenletek

A kanonikus impulzussűrűség

$$\Pi_a = \frac{\partial\Lambda}{\partial u_{a,t}} = \varrho_0 v_a \quad \Rightarrow \quad u_{a,t} = \frac{\Pi_a}{\varrho_0}, \tag{5.25}$$

a H Hamilton függvény χ sűrűsége egyben az e energiasűrűség

$$H = \int d^3r\,\chi, \qquad \chi = u_{a,t}\frac{\partial\Lambda}{\partial u_{a,t}} - \Lambda = \frac{\Pi^2}{\varrho_0} - \Lambda = \frac{\Pi^2}{2\varrho_0} + \epsilon = e. \tag{5.26}$$

A Hamilton egyenletek az (5.13) mozgásegyenlet ekvivalens alakját adják

$$\frac{\delta H}{\delta \Pi_a} = \frac{\partial\chi}{\partial\Pi_a} \quad = \quad \frac{\Pi_a}{\varrho_0} = u_{a,t}, \tag{5.27}$$

$$\frac{\delta H}{\delta u_a} = \frac{\partial\chi}{\partial u_a} - \left(\frac{\partial\chi}{\partial u_{a,b}}\right)_{,b} \quad = \quad (pJJ^{-1}_{ba})_{,b} = -\Pi_{a,t}. \tag{5.28}$$

Megjegyzés: Euler koordinátákkal a térelmélet bonyolultabb. Ilyet a relativisztikus esetben fogalmazunk meg, ennek speciális eseteként a nemrelativisztikus elmélet kiadódik.

6. Bevezetés a speciális relativitáselmélet kinematikájába

6.1. Inerciarendszerek, ívhossz

- Vonatkoztatási rendszer: nyugvó méterrudak és órák rendszere.
- Inerciarendszer (IR) az olyan vonatkoztatási rendszer, melyben a szabadon mozgó testek sebessége állandó.
- Esemény: valamely $(ct, \boldsymbol{r})$ koordinátákkal jellemezhető téridőbeli pont.

Bevezetjük a két esemény közötti ívhossz fogalmát

$$\Delta s_{AB} = \sqrt{c^2(t_B - t_A)^2 - (\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)^2}. \tag{6.1}$$

A tapasztalat szerint a fény sebessége minden IR-ben irányfüggetlenül ugyanaz. Ezért ha $\Delta s = 0$ akkor $\Delta s' = 0$, ahol Δs és $\Delta s'$ két IR-ben mért ívhossz.

Legyen $\mathcal{K}$ IR és $\mathcal{K}'$ hozzá képest $\boldsymbol{V}$ sebességgel mozgó IR. Mivel ds és ds' azonos rendű

kicsiny mennyiségek, vezető rendben

$$ds^2 = a(|\boldsymbol{V}|)ds'^2, \tag{6.2}$$

ahol a konstans szorzó a téridő homogenitása, és a tér izotrópiája miatt csak $|\boldsymbol{V}|$-től függhet. Ha az IR-ek egyike sincs kitüntetve (ez a relativitás elve), akkor

$$a(|-\boldsymbol{V}|)ds^2 = ds'^2. \tag{6.3}$$

A fenti két egyenlet pozitív megoldása

$$a(|\boldsymbol{V}|) = 1. \tag{6.4}$$

Azaz a ds ívelem invariáns skalár, következésképpen a véges ívhosszak is invariánsak az IR választására nézve.

6.2. Lorentz transzformáció

A Lorentz transzformáció különböző IR-ek koordinátái között teremt összefüggést. Formai követelmény, hogy tartsa meg az ívhosszt, azaz $(ct)^2 - \boldsymbol{r}^2$ legyen invariáns. Jelöljük egy esemény koordinátáit a következő módon $x^0 = ct$, $x^1 = r_x$, $x^2 = r_y$, $x^3 = r_z$, azaz

$$x^i = \begin{pmatrix} x^0 \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

Tekintsünk egy $x = x^1$-irányú boost-ot[a], azaz haladjon a $\mathcal{K}'$ origója v relatív sebességgel x irányban. Ekkor $(x^0)^2 - (x^1)^2$ invariáns skalár, ez az $1+1$ dimenziós eset. Bevezetjük az

$$a^0 = x^0, \qquad a^1 = ix^1 \tag{6.6}$$

jelölést, ezzel

$$(a^0)^2 + (a^1)^2 = \text{inv. skalár} \tag{6.7}$$

A (6.7)-et invariánsan hagyó transzformáció[b] ismert módon

$$\begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

[a] boost: x irányban állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérés. Fordítása: erősítés, fokozás.

[b] Homogén transzformációkat tekintünk, az eltolás csak az origó helyzetét változtatná meg.

ahol megengedjük, hogy α komplex legyen. Mivel x^i valós, azért α tisztán képzetes,

$$\alpha = i\beta \qquad \beta \in \mathbb{R}, \tag{6.9}$$

mint azt láthatjuk az x^i koordinátákat transzformáló képletből

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ -(\sin\alpha)/i & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\beta & -\sinh\beta \\ -\sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Vezessük be a $\gamma = \cosh\beta$ jelölést, és használjuk $ct = x^0, \quad x = x^1$-et! A $\mathcal{K}'$ origója v relatív sebességgel halad

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x}{t} = c\tanh\beta \quad \Rightarrow \quad \sinh\beta = \frac{v}{c}\gamma, \tag{6.11}$$

ahonnan a Lorentz transzformáció $1+1$ dimenzióban

$$x' = \gamma x - v\gamma t, \tag{6.12}$$
$$ct' = \gamma ct - \frac{v}{c}\gamma x. \tag{6.13}$$

Kilépve $1+3$ dimenzióba, a boost-ra merőleges koordinátákra

$$y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2. \tag{6.14}$$

Az (y,z) síkban tehát legfeljebb elfordulás lehetséges, azonban ennek irányát semmilyen fizikai ok nem tünteti ki, ezért a legegyszerűbb feltevéssel élünk, éspedig, hogy a merőleges koordináták egyenként invariánsak. Tetszőleges irányú boostra ezért

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{v}}{v} \quad \Rightarrow \quad x'^0 &= \gamma x^0 - (\boldsymbol{n}\boldsymbol{x})\gamma\frac{v}{c} = \gamma x^0 - \frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}), \\ (\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}') &= \gamma(\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}) - \frac{v}{c}\gamma x^0, \\ \boldsymbol{x}' - (\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{n}\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

A második egyenletet $\boldsymbol{n}$-nel szorozva hozzáadjuk a harmadikhoz

$$\boldsymbol{x}' = -\frac{\boldsymbol{v}}{c}\gamma x^0 + \boldsymbol{x} + (\gamma - 1)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}. \tag{6.16}$$

Mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c}\boldsymbol{v} \\ -\frac{\gamma}{c}\boldsymbol{v} & \mathbf{I} + (\gamma-1)(\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

6.1. Gyakorló feladat. *Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{\Lambda}(-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{v})$.*

6.3. Négyesvektorok, tenzorok

Az A^i mennyiséget négyesvektornak nevezzük, ha IR-ek között ugyanúgy transzformálódik, mint az x^i négyes helyvektor. Bevezetjük az alul indexelt komponenseket

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \tag{6.18}$$

Az Einstein-féle konvenció szerint ismétlődő alsó-felső indexpárral jelöljük az összegzést, melynek eredménye skalár, az A^i vektor "hossza"

$$A^iA_i = A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3 = (A^0)^2 - \boldsymbol{A}^2. \tag{6.19}$$

Másodrendű négyestenzornak nevezzük az A^{ik}-t, ha úgy transzformálódik, mint az $A^i B^k$ diád. Az indexek fel-le "húzogatása" a diádéival azonosan történik

$$\begin{aligned} &A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \quad \ldots \\ &A_0{}^0 = A^{00}, \quad A_0{}^1 = A^{01}, \quad A^0{}_1 = -A^{01}, \quad A_1{}^1 = -A^{11}, \quad \ldots \end{aligned} \tag{6.20}$$

Hasonlóan definiáljuk a tetszőleges rendű négyestenzorokat. Az egységtenzor, azaz a Kronecker delta, most egy alsó és egy felső indexszel rendelkezik

$$\delta_i^k A^i = A^k. \tag{6.21}$$

Bevezetjük a g^{ik} metrikus tenzort, amely a δ_i^k indexeinek föl- ill. lehúzásával kapható a (6.20) szabály szerint

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

A metrikus tenzorral éppen az indexek fel- és lehúzása végezhető el

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k, \quad A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k, \quad \ldots \tag{6.23}$$

A teljesen antiszimmetrikus negyedrendű (pszeudo) egységtenzor jele ϵ^{iklm}, felső indexekkel a szokásos módon definiáljuk, s a többi változatot a metrikus tenzorral generáljuk.

6.4. Sajátidő, idődilatáció

Valamely IR-ben nyugvó megfigyelő által mért idő a sajátidő, ez IR-től függetlenül definiált mennyiség és τ-val jelöljük. Mozogjon $\mathcal{K}'$ a $\mathcal{K}$-hoz képest $\boldsymbol{v}$ sebességgel. A $\mathcal{K}'$-ben nyugvó megfigyelő által mért ívhossz éppen $c\times$sajátidő, mert $\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \mathbf{0}$. Ez $\mathcal{K}$-ból nézve ugyanakkora

$$\mathrm{d}s'^2 = c^2 \mathrm{d}t'^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \mathrm{d}t/\gamma. \tag{6.24}$$

Tehát minden más IR-ből nézve hosszabb időt mérünk, ez az idődilatáció. A négyes térben adott pályákat, "világvonal"-akat, IR-ektől függetlenül értjük, míg konkrét leírásuk természetesen vonatkoztatási rendszerekből történik. Egy az A és B téridőbeli pontok közötti világvonalhoz az integrális sajátidőt rendelhetjük

$$\tau = \int_A^B \mathrm{d}\tau = \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}. \tag{6.25}$$

A $c\tau$ az és B közötti ívhossz. A τ Lorentz skalár, hiszen a definíciója független attól, milyen IR-ből mérjük. Az elvet később is használni fogjuk: valamely tömegpont pillanatnyi nyugalmi helyzetében definiált skalár, pl. sűrűség vagy hőmérséklet egyben Lorentz skalár.

A Lorentz transzformációból kapható eredmény ezzel természetesen összhangban van. A (6.12)-be $x' = 0$-t helyettesítve és (6.13)-ból a $v = x/t$ felhasználásával adódik

$$t' = t/\gamma = \tau. \tag{6.26}$$

Azaz a $\mathcal{K}'$ origójában levő órán lassabban telik az idő, mint azt a $\mathcal{K}$-ból mérjük.

6.5. Lorentz kontrakció

Mozogjon a $\mathcal{K}$-ban A és B végpontú x irányú rúd v sebességgel a hossztengelye mentén. A $\mathcal{K}'$-t rögzítsük a rúdhoz, melyben a rúd nyugalmi hossza L_0. A két IR téridő origói

essenek egybe. A $\mathcal{K}'$-ben az végpontok időben állandóak

$$x'_A(t') = 0, \quad x'_B(t') = L_0. \tag{6.27}$$

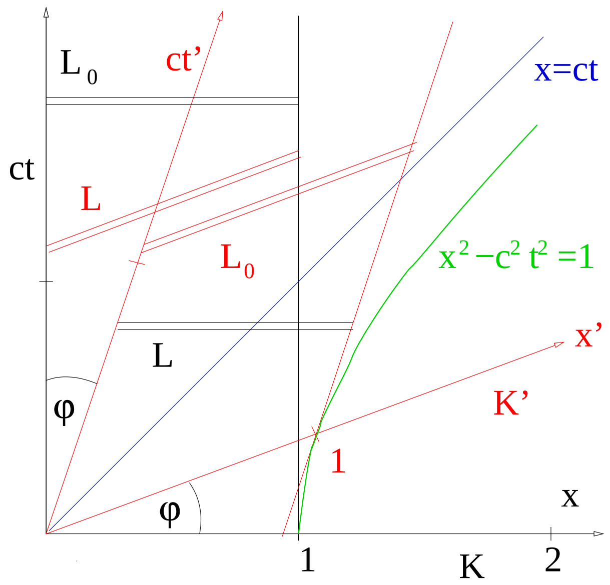
Ebből a Lorentz transzformáció segítségével a $\mathcal{K}$-beli világvonalak egyenleteit kapjuk

$$0 = x_A(t) - vt, \quad L_0 = \gamma(x_B(t) - vt). \tag{6.28}$$

A $\mathcal{K}$-ban a rúd hossza az egydejű távolság

$$L = x_B(t) - x_A(t) = \frac{L_0}{\gamma}. \tag{6.29}$$

A két IR-ben a rúd B végpontjának helymérése különböző téridőbeli eseményeknek felel meg!



8. ábra. A Lorentz kontrakció geometriai ábrázolása. A fénysebesség invarianciája alapján a $\mathcal{K}'$ hossz- és időtengelyei közös szögfelezőjű, hegyesszöget bezáró egyenesek, $\operatorname{tg}\varphi = v/c$. Az $x^2 - c^2t^2 = 1 = x'^2 - c^2t'^2$ hiperbolát minden IR-ben, amelyek origói egybeesnek, ugyanazon egyenlet adja, ezért az a $\mathcal{K}'$-beli hosszegységet metszi ki a $t' = 0$ tengelyből. A $\mathcal{K}'$-beli 1 hosszúságú rúd (L_0) a $\mathcal{K}$-ban mérve 1-nél rövidebb (L) és viszont.

6.1. Házi feladat. *Vezessük le a kontrakció mértékét geometriai úton, azaz mutassuk meg, hogy (i) az $x' = 1$ egyenes a hiperbola érintője; (ii) ez az egyenes épp az $1/\gamma$ hosszat metszi ki a $t = 0$ tengelyből; (iii) és megfordítva, az $x = 1$ (függőleges) érintő ugyanezt a hosszat metszi ki a $t' = 0$ tengelyből. (15%)*

6.6. Négyessebesség, négyesgyorsulás

A négyessebesség:

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \tag{6.30}$$

u^i négyesvektor, mert $\mathrm{d}\tau$ skalár. Nyilván

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^i\mathrm{d}x_i = c^2\mathrm{d}\tau^2 \quad \Rightarrow \quad u^iu_i = c^2. \tag{6.31}$$

Pillanatnyilag együttmozgó rendszerben $u^a = 0$, $a = 1, 2, 3$, ezért

$$u^i = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

és általános IR-ből nézve Lorentz transzformációval adódik

$$u^i = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \boldsymbol{v}\gamma \end{pmatrix}, \tag{6.33}$$

a sebességnégyzet innen is láthatóan c^2. Hasonlóan definiálható a négyesgyorsulás is

$$w^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2}. \tag{6.34}$$

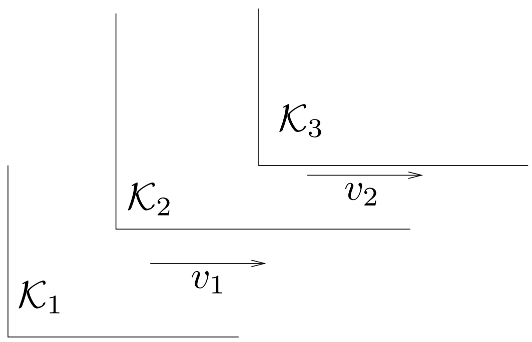
Az $u^i u_i = c^2$ egyenletet differenciálva látjuk, hogy a négyesgyorsulás merőleges a sebességre

$$u_i w^i = 0. \tag{6.35}$$

6.7. Sebességek összeadása

6.7.1. Azonos irányú boostok összege

Tekintsünk három IR-t, $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$. Mozogjon $\mathcal{K}_1$-hez képest a $\mathcal{K}_2$ v_1-el és $\mathcal{K}_2$ -höz képest a $\mathcal{K}_3$ v_2-vel.



9. ábra. Párhuzamos boost-ok.

Azt vizsgáljuk, vajon $\mathcal{K}_1$ hez képest milyen v_3-al mozog a $\mathcal{K}_3$, azaz meghatározzuk két egymást követő Lorentz transzformáció hatását

$$\boldsymbol{\Lambda}(v_1)\boldsymbol{\Lambda}(v_2) = \boldsymbol{\Lambda}(v_3). \tag{6.36}$$

Áttérünk a könnyebben kezelhető β rapiditás paraméterre, $v = c\tanh\beta$, és felidézzük, hogy $1+1$ dimenzióban β a Minkowski-térbeli imaginárius forgatási szögnek felel meg. Innen nyilvánvaló, hogy a rapiditások összeadódnak

$$\boldsymbol{\Lambda}(\beta_1)\boldsymbol{\Lambda}(\beta_2) = \boldsymbol{\Lambda}(\beta_1+\beta_2) = \boldsymbol{\Lambda}(\beta_3). \tag{6.37}$$

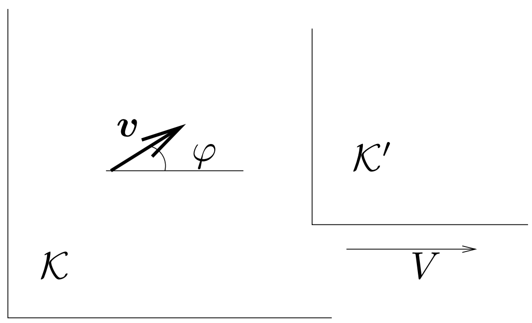
A sebességekre ebből következően

$$v_3 = c\,\mathrm{th}(\beta_3) = \mathrm{th}(\beta_1 + \beta_2) = c\frac{\mathrm{th}\beta_1 + \mathrm{th}\beta_2}{1 + \mathrm{th}\beta_1 \mathrm{th}\beta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \tag{6.38}$$

A Lorentz transzformáció mátrixát alkalmazva $1+3$ dimenzióban párhuzamos boostokra természetesen ugyanezt kapjuk.

6.7.2. A sebességvektor elfordulása

Mozogjon a $\mathcal{K}$ rendszerben egy részecske úgy hogy sebességvektora φ szöget zár be az x iránnyal, és abszolult értéke v.



10. ábra. A $\boldsymbol{v}$ sebesség $\mathcal{K}'$-ben látott elfordulását vizsgáljuk.

Vizsgáljuk meg hogy milyen szöget zár be a részecske sebességvektora abban a $\mathcal{K}'$ rendszerben amely x irányban halad $\mathcal{K}$-hoz képest, s relatív sebességüket a $\beta = \mathrm{arth}(V/c)$ rapiditás jellemzi. A $\mathcal{K}$ rendszerben v-hez a $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ tartozik, és hasonlóan a $\mathcal{K}'$ rendszerben v'-hez, amely a részecske sebessége onnan nézve, a γ'-t rendeljük. A négyessebességre alkalmazva a Lorentz transzformációt

$$\begin{aligned} \gamma' v'_x &= \mathrm{ch}\beta\gamma v_x - \mathrm{ch}\beta\frac{V}{c}c\gamma, \\ \gamma' v'_y &= \gamma v_y. \end{aligned} \tag{6.39}$$

A fenti két egyenletet elosztva egymással megkapjuk hogy a $\mathcal{K}'$-ben mekkora φ' szöget zár be a részecske sebessége az x' koordinátatengellyel

$$\mathrm{tg}\varphi' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{1}{\mathrm{ch}\beta}\frac{v_y}{v_x - V}. \tag{6.40}$$

A fenti képlet csak a $(\mathrm{ch}\beta)^{-1}$ szorzóban tér el a nemrelativisztikus formulától. Ha fénysugarat vizsgálunk akkor az előzőekből kapjuk

$$\mathrm{tg}\varphi' = \frac{1}{\mathrm{ch}\beta}\frac{c\sin\varphi}{c\cos\varphi - V}. \tag{6.41}$$

Ha a nevező zérus, akkor a fénysugár $\mathcal{K}'$-ből látszó iránya merőleges a relatív sebességre

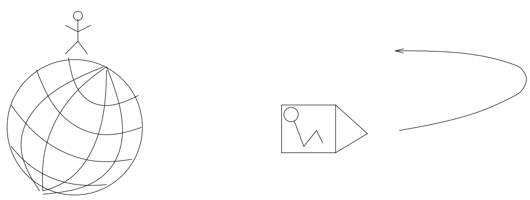
$$\varphi = \arccos(V/c) \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = \pi/2. \tag{6.42}$$

6.2. Házi feladat. *Határozzuk meg a sebességösszeadás szabályát nem párhuzamos boost-okra a Lorentz transzformáció* 1+3 *dimenziós mátrixának felhasználásával. (20%)*

6.8. Paradoxonok

6.8.1. Ikerparadoxon

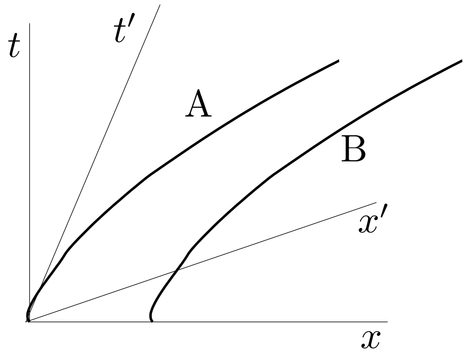
Ikerpár egyik tagja űrhajóra szállva közel fénysebességgel távolodik, majd visszafordul a Földre, ezalatt testvére a Földön tartózkodik. A látszólagos ellentmondás abban áll, hogy az utas azt gondolhatja, a Földön maradt testvére öregszik, míg emez azt, hogy az utas lesz öregebb. A két meggondolás egyike lehet csak igaz.



11. ábra. Melyikük lesz öregebb?

6.8.2. Összekötött űrhajók

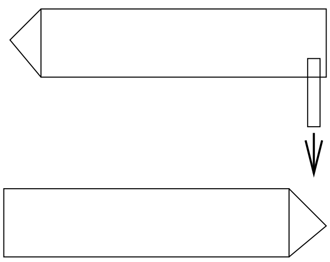
Két űrhajót kötéllel összekötöttek, azonos pillanatban egymás mögött indították őket, azóta az űrhajók azonos gyorsulással mozognak. Földi megfigyelő szerint a kötél kontrakciót szenved, s mivel az űrhajók közötti távolság nem változik, a kötél elszakad. Ezzel szemben az űrhajósok szerint a kötél nem rövidül, ezért nem szakad el.



12. ábra. Összekötött űrhajók és út-idő diagramjuk.

6.8.3. Űrcsata

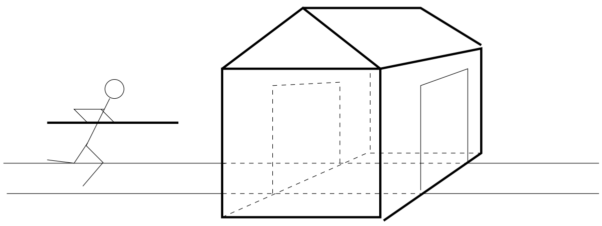
Két azonos méretű űrhajó egymással szemben, közeli párhuzamos vonalak mentén halad. Amikor fedésbe kerülnek, akkor az egyik űrhajó végén levő lézerágyúból a másik orrára lőnek. Az első azt láthatja, hogy a másik rövidült, ezért nem találna, de a célbavett szemszögéből a támadó rövidült, ezért telibe talál. Oldjuk fel a paradoxont!



13. ábra. Talált-e a lövés?

6.8.4. Rúd-pajta

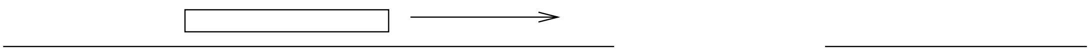
Gyorsan futó ember kezében rúddal egy pajta két egymással szemben levő nyitott ajtaja felé tart. A pajta nyugalmi hossza 10 méter, a rúd nyugalmi hossza ugyanennyi. A pajta rendszeréből nézve a rúd Lorentz kontrakciót szenved és így befér a pajtába, tehát lesz olyan időpont amikor a teljes rúd a pajtában van. A futó nyugalmi rendszerében viszont a pajta szenved kontrakciót így a rúd soha sem fér a pajtába. Melyik megfigyelőnek van igaza?



14. ábra. Befér-e a rúd?

6.8.5. Rúd-lyuk

Sík lapon rúd csúszik a nyugalmi hosszával azonos átmérőjű lyuk felé. A rúddal mozgó IR-ből nézve a lyuk rövidült, ezért a rúd nem fér bele, viszont a lyukhoz rögzített IR-ből a rúd rövidült, azaz beleesik a lyukba. Mi történik?



15. ábra. Beleesik-e a rúd a lyukba?

7. Pontmechanika görbevonalú koordinátákban

7.1. Nemrelativisztikus tömegpont szabad mozgása

Az alábbi egyenletek alkalmazhatók olyan egyszerű esetekben is mint pl.

- rögzített felületen való mozgás
- szabad mozgás görbevonalú koordinátákkal

Távolságelem a koordinátaelemekkel kifejezve

$$\mathrm{d}^2 s = g_{ab}\mathrm{d}q^a\mathrm{d}q^b, \tag{7.1}$$

ahonnan a kinetikus energia ($m = 1$)

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}_a = \frac{1}{2}g_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b = L \tag{7.2}$$

$$\text{ELE:} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} \tag{7.3}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_{ab}\dot{q}^b) = \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^c\dot{q}^b + g_{ab}\ddot{q}^b = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\dot{q}^b\dot{q}^c \tag{7.4}$$

Átrendezve:

$$g_{ab}\ddot{q}^b + \left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0 \tag{7.5}$$

A b, c indexekben szimmetrizálva kapjuk

$$g_{ab}\ddot{q}^b + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c = g_{ab}\ddot{q}^b + \Gamma_{a,bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0, \tag{7.6}$$

ahonnan a

$$\Gamma^a_{bc} = g^{ad}\Gamma_{d,bc} \tag{7.7}$$

jelöléssel

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = \frac{\mathrm{D}\dot{q}^a}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{7.8}$$

Ez a geodetikus egyenlete, amelyet tisztán mechanikai alapon vezettünk le. A (7.8) formula a kovariáns derivált definíciója metrikus térben, általános v^a vektorra a kovariáns differenciál

$$\mathrm{D}v^a = \mathrm{d}v^a + \Gamma^a_{bc}\mathrm{d}q^b v^c \tag{7.9}$$

Tömör jelöléssel

$$v^a_{;b} = v^a_{,b} + \Gamma^a_{bc}v^c, \tag{7.10}$$

és tenzorra indexenként (mintha vektorok diadikus szorzata lenne)

$$T^{ab}_{;c} = T^{ab}_{,c} + \Gamma^a_{cd} T^{db} + \Gamma^b_{cd} T^{ad}. \tag{7.11}$$

A (7.9) eltűnése valamely pálya mentén a párhuzamos eltolást definiálja, láthatjuk hát, hogy a geodetikus olyan görbe, amely mentén a sebesség párhuzamosan van eltolva. Adott pontban adott irány egyértelműen meghatározza a geodetikust.

A kovariáns differrenciál nemcsak a tér megváltozását, hanem a lokális koordinátavektorok elfordulását is figyelembe veszi. A skalárszorzat megváltozása

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(v^a u_a) &= \mathrm{d}v^a\, u_a + \mathrm{d}u_a\, v^a = \mathrm{D}v^a\, u_a + \mathrm{D}u_a\, v^a \\ &= \mathrm{d}v^a\, u_a + \Gamma^a_{bc} \mathrm{d}q^b v^c\, u_a + \mathrm{D}u_a\, v^a, \end{aligned} \tag{7.12}$$

ahonnan az alsóindexes vektor kovariáns differenciálja

$$\mathrm{D}u_a = \mathrm{d}u_a - \Gamma^c_{ba} \mathrm{d}q^b u_c = \mathrm{d}u_a - \Gamma_{c,ba} \mathrm{d}q^b u^c. \tag{7.13}$$

A geodetikus ekvivalens egyenlete éppen (7.4)-t adja

$$\frac{\mathrm{D}\dot{q}_a}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}_a - \Gamma_{c,ba} \dot{q}^b \dot{q}^c = \ddot{q}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} \dot{q}^b \dot{q}^c = 0. \tag{7.14}$$

7.2. Hamilton elv relativisztikus tömegpontra

A relativisztikus tömegpontra vonatkozó egyenletek az alábbi két esetben lesznek majd alkalmazhatók:

- spec.rel (SR) görbevonalú paraméterezéssel $R_{iklm} = 0$
- ált.rel (GR), lehet $R_{iklm} \neq 0$

Emlékeztetőként tekintsük át az alapfogalmakat:

- ívelem: $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}^2 s = g_{ik} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^k$
- sajátidő: $\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c}$
- pálya: $x^i(\tau)$ (általában nem négyesvektor, SR-ben az)
- sebesség: $u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} = \dot{x}^i$
- gyorsulás: $\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{d}\tau} = w^i$
- kinematikai azonosság: $u^i u_i = c^2$

- lokálisan együttmozgó IR-ben:

$$u_0^i = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{7.15}$$

- lokálisan Minkowski:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.16}$$

A relativisztikus tömegpont Lagrange függvénye kovariáns módon

$$L(x^i, u^i, \nu) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dinamikai} \\ \text{Lagrange függvény}}}{L_0(x^i, u^i)} + \frac{\nu}{2}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kinematikai} \\ \text{kényszer}}}{\left(1 - g_{ij}\frac{u^i u^j}{c^2}\right)}, \tag{7.17}$$

ahol ν Lagrange multiplikátor. A dinamikai változó az $x^i(\tau)$ trajektória. A kanonikus impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{\partial L_0}{\partial u^i} - \frac{\nu}{c^2}u_i = p_{0i} - \frac{\nu}{c^2}u_i, \tag{7.18}$$

és az általánosított erő

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial L_0}{\partial x^i} - \frac{\nu}{2c^2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}u^j u^k = F_{0i} - \frac{\nu}{2c^2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}u^j u^k. \tag{7.19}$$

A u_i sebesség négyesvektor, ezért a p_i impulzus is az, mivel azonban x^i általában nem négyesvektor, F_i sem az. A Hamilton függvény:

$$H = p_i u^i - L = p_{0i}u^i - \nu - L_0 = E. \tag{7.20}$$

Itt E nem lehet a részecske energiája, mert emez, mint később látni fogjuk, a négyesimpulzus nulladik komponense, E pedig skalár. A Hamilton függvény időben állandó, innen ν-re kapunk egyenletet

$$\dot{\nu} = \dot{p}_{0i}u^i + p_{0i}\dot{u}^i - \frac{\partial L_0}{\partial x^i}u^i - \frac{\partial L_0}{\partial u^i}\dot{u}^i = (\dot{p}_{0i} - F_{0i})u^i. \tag{7.21}$$

Az ELE jelölésünkkel így írható

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{7.22}$$

A (7.18,7.19) felhasználásával a mozgásegyenlet

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}\nu u_i}{\mathrm{d}\tau}-\frac{\nu}{2c^2}g_{jk,i}u^j u^k=\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}\nu u_i}{\mathrm{d}\tau}-\Gamma_{j,ik}\frac{\nu}{c^2}u^j u^k=\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}\nu u_i}{\mathrm{d}\tau}=\dot{p}_{0i}-F_{0i}, \tag{7.23}$$

ahol a jobboldal az L_0-ból származó szokásos járulék, s a baloldalon ν-t az időfüggése miatt a derivált alatt tartjuk. Felhasználtuk a sebesség alsóindexes kovariáns derivált (7.14) formuláját. A jobboldal tagjai (a p_{0i} nem-kovariáns időderiváltja és F_{0i}) általában nem négyesvektorok, de összegük szükségképpen az.

Vegyük észre, hogy a kinematikai kényszer éppen olyan alakú, mint a nemrelativisztikus kinetikus energia görbevonalú koordinátarendszerben, miként azt a 7.1 részben láttuk. Ezért onnan a sebesség ($\times\nu/c^2$) kovariáns deriváltja származik, ezen kívül $\dot{p}_0$ és F_0 az L_0-ból adódó szokásos járulék.

Szorozzuk meg a

$$\frac{1}{c^2}\dot{\nu}u_i+\frac{\nu}{c^2}\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}\tau}=\dot{p}_{0i}-F_{0i} \tag{7.24}$$

mozgásegyenletet u^i-val ill. az arra merőleges projekciós operátorral

$$\dot{\nu}=(\dot{p}_{0i}-F_{0i})u^i \quad \leftarrow \quad u^i \text{ -vel párhuzamos komponens, ez éppen (7.21)} \tag{7.25}$$

$$\frac{\nu}{c^2}\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}\tau}=(\dot{p}_{0j}-F_{0j})\left(g_i^j-\frac{u_i u^j}{c^2}\right) \quad \leftarrow \quad u^i \text{ -re merőleges komponens} \tag{7.26}$$

7.3. Szabad mozgás

Vizsgáljuk az állandó Lagrange-függvény esetét. A nemrelativisztikus limesszel összehasonlítva kapjuk

$$S=L_0\int\mathrm{d}\tau=L_0\int_0^T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t\approx L_0T-\frac{1}{2}L_0\int_0^T\frac{v^2}{c^2}\mathrm{d}t, \tag{7.27}$$

ezért

$$L_0=-mc^2, \tag{7.28}$$

ahol m a nyugalmi tömeg. A konstans tag természetesen nem befolyásolja a kovariáns mozgásegyenletet. Tehát

$$L=-mc^2+\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{g_{ij}u^i u^j}{c^2}\right), \tag{7.29}$$

ahonnan most $p_{0i}=0$, $F_{0i}=0$, és az állandó

$$E=-\nu+mc^2 \tag{7.30}$$

függetlenül a kezdeti feltételtől. Választhatjuk $E=0$-t, ekkor $\nu=mc^2$, állandó. Az ELE-ből a geodetikus egyenletét kapjuk

$$\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{d}\tau}=0. \tag{7.31}$$

7.4. Vektorpotenciállal leírható részecske

Vizsgáljuk a következő Lagrange-függvényt

$$L_0=-mc^2+\frac{e}{c}A_iu^i. \tag{7.32}$$

Ahol $A_i(x)$ vektorpotenciál és e konstans. Ekkor

$$\begin{aligned} p_{0i}=&\frac{e}{c}A_i \quad\Rightarrow\quad \dot{p}_{0i}=\frac{e}{c}A_{i,j}u^j,\\ F_{0i}=&\frac{e}{c}A_{j,i}u^j. \end{aligned} \tag{7.33}$$

A Hamilton-függvény értékét most is vehetjük zérusnak

$$E=p_{0i}u^i-\nu-L_0=\frac{e}{c}A_iu^i-\nu+mc^2-\frac{e}{c}A_iu^i=-\nu+mc^2=0, \tag{7.34}$$

azaz a szabad részecske esetéhez hasonlóan $\nu=mc^2$. A mozgásegyenlet

$$m\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}\tau}=\frac{e}{c}(A_{i,j}-A_{j,i})u^j, \tag{7.35}$$

a jobboldalon a Lorentz erő áll. Valóban az $E=0$ adja jól az ismert nemrelativisztikus mozgásegyenletet!

7.5. Skalárpotenciál

A Lagrange függvény:

$$L_0=-mc^2-\Phi(x). \tag{7.36}$$

A potenciál egy állandó erejéig határozatlan. Az mc^2 leválasztásának az adhat fizikai értelmet, ha $mc^2\gg\Phi$. Az impulzus és az erő

$$p_{0_i}=0 \qquad F_{0i}=-\Phi_{,i} \tag{7.37}$$

továbbá a Hamilton-függvényből ν helyfüggőnek adódik

$$\nu = mc^2 + \Phi(x) - E, \tag{7.38}$$

E-t újból zérusnak választhatjuk, ezzel a potenciál nullpontjában állítjuk be a $\nu = mc^2$ relációt. A mozgásegyenlet

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}\nu u_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(u_i(m + c^{-2}\Phi(x))\right) = \Phi_{,i}, \tag{7.39}$$

avagy

$$\left(m + c^{-2}\Phi(x)\right)\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}\tau} = \Phi_{,j}\left(g_i^j - \frac{u_i u^j}{c^2}\right). \tag{7.40}$$

Látható, a potenciál effektív helyfüggő tömegként lép fel.

7.6. Tenzorpotenciálok

Általában a sebesség szerinti sorfejtésben magasabbdimenziós tenzorok is megjelenhetnek

$$L_0(x^i, u^i) = -mc^2 - \Phi(x) + A_i(x)u^i + B_{ij}(x)u^i u^j + C_{ijk}(x)u^i u^j u^k + \ldots \tag{7.41}$$

7.1. Házi feladat. *A kvadratikus tagig bezárólag határozzuk meg a mozgásegyenletet. A ν-t az $E = 0$ feltétel mellett számítsuk. (20%)*

8. Térelmélet görbevonalú koordinátákkal

8.1. Hamilton-elv

A hatás

$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda(\phi_\alpha, \phi_{\alpha,i}, x)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{8.1}$$

ahol a koordináta x^i, a dinamikai változóink a $\phi_\alpha(x)$ terek, és feltettük, hogy magasabb deriváltjaik nem lépnek fel. A felsőindexes koordináta szerinti derivált alsóindexes, $\phi_{\alpha,i}$, továbbá az α "könyvelési" index, skalár, vektor, stb., mennyiségeket címkézhet. Ekkor az ELE

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,i}}\sqrt{-g}\right)_{,i}. \tag{8.2}$$

Például válasszuk

$$\Lambda = \frac{1}{2} g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} \tag{8.3}$$

$$\overset{\text{ELE}}{\Rightarrow} \quad 0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(g^{ij} \sqrt{-g} \phi_{,j} \right)_{,i} \overset{\text{def.}}{=} \Box\phi \tag{8.4}$$

Megkaptuk a D'Alembert (és benne a Laplace) operátor görbevonalú koordinátarendszerbeli alakját tisztán mechanikai alapon!

8.2. Energia-impulzus tenzor

Az EIT a kanonikus definició szerint (a $\sqrt{-g}$-t kiemeljük)

$$T_i{}^j \sqrt{-g} = \phi_{\alpha,i} \frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial \phi_{\alpha,j}} - g_i{}^j \Lambda \sqrt{-g}. \tag{8.5}$$

Ez azonban általában nem négyestenzor (nem "kovariáns"). Ha a Λ legföljebb skalár terek (nem vektorok vagy tenzorok) gradienseitől függ, akkor az EIT kovariáns. A mérlegegyenlet szintén nem kovariáns általában

$$\left(T_i{}^j \sqrt{-g} \right)_{,j} = - \left(\sqrt{-g} \Lambda \right)_{,i} \Big|_{\phi}. \tag{8.6}$$

A szemináriumon tárgyaltuk, hogyan vezethetünk be kovariáns EIT-t, ez a Hilbert-féle EIT. Ha Λ nem függ g_{ij} deriváltjaitól

$$T^{\mathrm{H}}_{ij} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{ij}} - g_{ij} \Lambda. \tag{8.7}$$

Ha a Λ nem tartalmaz explicit koordinátafüggést a metrikus tenzorén kívül, akkor

$$T_i^{\mathrm{H}j}{}_{;j} = 0. \tag{8.8}$$

Mivel azonban ez kovariáns divergenciát tartalmaz, általában nem következik belőle megmaradási tétel. Tekintsük példaképp

$$\Lambda = \frac{1}{2} g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j}, \tag{8.9}$$

akkor

$$T_i{}^j = T^{\mathrm{H}}_{ij} = \phi_{,i} \phi^{,j} - \frac{1}{2} g_i^j \phi_{,k} \phi^{,k}, \tag{8.10}$$

a két EIT megegyezik.

8.1. Házi feladat. *Vezessük le a $\Lambda = \frac{1}{2} A_{i;j} A^{i;j}$-vel adott rendszer mozgásegyenletét és számítsuk ki mindkét EIT-t. Kovariáns-e a kanonikus EIT?(20%)*

8.3. Mérlegegyenletek

A kontinuitási egyenlet kovariáns módon a négyes áramsűrűséggel írható fel. Pillanatnyilag együttmozgó rendszerben

$$j_0^i = \begin{pmatrix} c\varrho \\ \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad j^i = \varrho u^i, \tag{8.11}$$

ahol ϱ a nyugalmi sűrűség. Minkowski metrika (SR) esetén a kontinuitási egyenlet

$$j^i{}_{,i} = 0, \tag{8.12}$$

vagy komponensekre kiírva

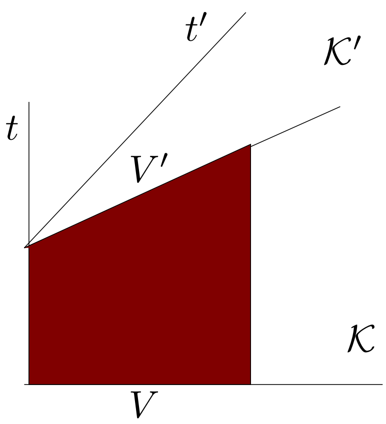
$$\frac{1}{c} j^0{}_{,t} + j^a{}_{,a} = 0. \tag{8.13}$$

A nemrelativisztikus limeszben ez visszaadja az ismert $\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \boldsymbol{\nabla}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0$ egyenletet. Ha a V térfogat felületén nem folyik át áram, akkor a Gauss-tétel alapján

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int j^0 \mathrm{d}V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{tömegmegmaradás.} \tag{8.14}$$

Általánosabban

$$\int j^i{}_{,i} \mathrm{d}^4 x = \oint j^i \mathrm{d}A_i = \underbrace{\int j'^0 \mathrm{d}V' - \int j^0 \mathrm{d}V}_{\substack{\text{Lorentz skalár,} \\ \text{invariáns az időeltolásra is}}} = 0 \tag{8.15}$$



16. ábra. Az ábrázolt négyes térfogatra integrálunk.

Valamely labor IR-ből $j^0 = c\varrho\gamma = c\varrho_L$ és $\mathrm{d}V_L = \frac{\mathrm{d}V}{\gamma}$, és valóban

$$\int \varrho_L \mathrm{d}V_L = \text{állandó} = \int \varrho\gamma\frac{\mathrm{d}V}{\gamma} = \int \varrho \mathrm{d}V = M, \tag{8.16}$$

azaz a (nyugalmi) tömeg minden IR-ből nézve $\int \varrho \mathrm{d}V$, invariáns.

Görbevonalú koordinátarendszerben

$$j^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}j^i)_{,i} = 0. \tag{8.17}$$

8.1. Gyakorló feladat. *Mutassuk meg, hogy a kovariáns divergencia előáll a fenti közönséges divergencia alakjában a Γ szimbólumok g_{ij}-vel kifejezett formulájából. Ez összhanban van azzal, hogy a (8.4) D'Alembert operátor éppen a négyes értelemben vett* "div grad".

A kontinuitási egyenletet integrálva négyes térfogatra

$$\int j^i_{;i}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = \int \left(j^i\sqrt{-g}\right)_{,i}\mathrm{d}^4x = \oint \sqrt{-g}j^i\mathrm{d}A_i. \tag{8.18}$$

Mivel felületi integrállá alakíthattuk, megmaradás következik belőle.

Vizsgáljuk az eltűnő tenzoriális divergenciát. SR-ben a

$$T_i{}^j{}_{,j} = 0 \tag{8.19}$$

egyenletet állandó a^i-vel szorozva vektor-kontinuitást kapunk. Ezért

$$\int a^i T_i^0 \mathrm{d}V = \text{skalár} \tag{8.20}$$

tehát a

$$\int T_i^0 \mathrm{d}V = \text{4-es vektor}, \tag{8.21}$$

megmarad.

GR-ben a tenzoriális divergencia térfogati integrálját nem tudjuk felületivé alakítani, ezért a

$$T_i{}^j{}_{;j} = 0 \tag{8.22}$$

egyenletből általában nem következik megmaradási tétel.

8.4. Az ideális folyadék hidrodinamikája görbevonalú koordinátarendszerben

Fizikai relevancia:
–> SR hidrodinamika görbevonalú koordinátákkal,
–> GR hidrodinamika anyagi része adott metrikával (a térre való visszahatást elhanyagoljuk).

8.4.1. A Lagrange sűrűség függvény

Nemrelativisztikus Lagrange sűrűség függvény (LSF):

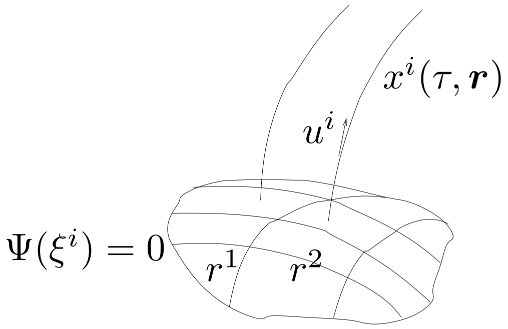
$$\Lambda = \frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho\epsilon(\varrho, s). \tag{8.23}$$

A GR esetben a következő LSF-ből indulunk ki

$$\Lambda = -\varrho\epsilon(\varrho, s) + \frac{\varrho\nu}{2}\left(1 - g_{ij}\frac{u^i u^j}{c^2}\right), \tag{8.24}$$

ahol ϱ, ϵ, s a pillanatnyilag együttmozgó rendszerbeli, azaz nyugalmi sűrűség, fajlagos belső energia és entrópia, és alkalmaztuk a kinematikai kényszert. A fajlagos energia zérus hőmérsékleten c^2, ehhez adódik a termikus. A nemrelativisztikus kinetikus energia formula az együttmozgóról az euklideszi koordinátákra való áttéréskor jelenik meg, mint azt a pontmechanikában láttuk.

Ha Lagrange koordinátákkal írjuk le a rendszert, akkor a dinamikai változók az $x^i(\tau; \xi^i)$ pályák, amelyeket a kezdeti feltétellel különböztetünk meg, $\xi^i = x^i(0; \xi^i)$. A kezdeti koordináták egy térszerű felületen helyezkednek el, ezt kovariáns módon adhatjuk meg $\Psi(\xi^i) = 0$. A kezdeti felületet három skalár paraméterrel koordinátázhatjuk, r^a, $a = 1, 2, 3$, amelyet a könyvelés kedvéért $\boldsymbol{r}$ vektorként írhatunk. A Lagrange leírásban a hatás a $\tau, \boldsymbol{r}$ koordinátákra vett integrál.



17. ábra. Áramlási vonalak. A kezdeti pontok ξ^i négyes koordinátái három paraméterrel, $\boldsymbol{r}$-rel megadhatók.

Az euleri koordinátázás szerint a sebességtér a dinamikai változó, s az aktuális négyes pozíciót használjuk koordinátaként. Azokat a megmaradási tételeket, amelyeket a lagrange-i leírás automatikusan tartalmaz, az euleri képben külső kényszerként, multiplikátorokkal kell figyelembe vennünk.

Megmaradási tételek
–> kontinuitás: $\left(\varrho u^i\right)_{;i} = 0$;
–> adiabatikusság: $\dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = s_{,i}u^i = 0$ (a relativisztikus konvektív időderivált éppen a

gradiens és a négyessebesség szorzataként adódik);
–> kezdeti feltétel megmaradása: az $x^i(\tau, \boldsymbol{r})$ pályagörbe invertálható, azaz van olyan $\boldsymbol{r}(x^i, \tau)$ függvény, amelybe az $x^i(\tau, \boldsymbol{r}_0)$ pályagörbét helyettesítve időben állandót kapunk, amely éppen a pálya $\boldsymbol{r}_0$ kezdeti feltétele. A három megmaradó függvény létezése éppen annak a matematikai megfogalmazása, hogy a pályák nyalábok. Mivel a részecskék mozgásegyenlete másodrendű differenciálegyenlet, a $\boldsymbol{v}(x^i, \tau)$ kezdeti sebességek is a pályát jellemző állandók — e kérdésre később visszatérünk.

A teljes LSF a (8.24) – ezután ezt Λ_0-val jelöljük – és a kényszerfeltételek LSF-ének összege

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1, \tag{8.25}$$

$$\Lambda_0 = -\varrho\epsilon(\varrho, s) + \frac{\varrho\nu}{2}\left(1 - g_{ij}\frac{u^i u^j}{c^2}\right), \tag{8.26}$$

$$\Lambda_1 = \varrho\left(\dot{\Phi} + \eta\dot{s} - \boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{r}}\right) = \varrho\left(\Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_{,i}\right)u^i. \tag{8.27}$$

Itt $\Phi, \eta, \boldsymbol{v}$ Lagrange multiplikátor terek.

NB: A kontinuitást figyelembe vehetnénk a $-\left(\varrho u^i\right)_{;i}\Phi$ kényszerfeltétellel is. Ez az általunk használt $\varrho\dot{\Phi} = \varrho\Phi_{,i}u^i$ taghoz képest a hatásintegrálban csak egy (nem kovariáns) divergenciában különböző járulékot ad, a divergencia viszont felületi integrállá alakítható, ezért a két megközelítés ekvivalens térfogati mozgásegyenleteket eredményez.

8.4.2. Mozgásegyenletek az Euler-képben

Dinamikai terek: $u^i, \Phi, \eta, s, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, \varrho$, hatás: $S = \frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x$.

δu^i: $\frac{\nu}{c^2}u_i = \Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_{,i}$, a sebesség potenciálos előállítása,
$\delta\Phi$: $\left(\varrho u^i\sqrt{-g}\right)_{,i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\varrho u^i\right)_{;i} = 0$, kontinuitás,
$\delta\eta$: $\dot{s} = 0$, adiabatikusság,
δs: $\left(\varrho u^i\eta\sqrt{-g}\right)_{,i} = -\varrho\frac{\partial\epsilon}{\partial s}\sqrt{-g} \quad \Rightarrow \quad \varrho u^i\eta_{,i}\sqrt{-g} = -\varrho T\sqrt{-g} \quad \Rightarrow \quad \dot{\eta} = -T$,
$\delta\boldsymbol{v}$: $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$, a kezdeti feltételek "megmaradása",
$\delta\boldsymbol{r}$: $\left(\varrho u^i\boldsymbol{v}\sqrt{-g}\right)_{,i} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_{,i}u^i = \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$, a kezdeti sebesség "megmaradása"
$\delta\varrho$: $-\epsilon - \varrho\frac{\partial\epsilon}{\partial\varrho} + \dot{\Phi} + \eta\dot{s} - \boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi} = \epsilon + \varrho\frac{\partial\epsilon}{\partial\varrho} = \epsilon + \frac{p}{\varrho} = w$, a fajlagos entalpia.

A segédterek kezdeti feltételeit zérusnak választhatjuk

$$\Phi(0) = 0, \qquad \eta(0) = 0. \tag{8.28}$$

A ν multiplikátor maga az entalpia, ha ugyanis megszorozzuk a δu^i egyenletét u^i-val

$$\nu = \dot{\Phi} + \eta\dot{s} - \boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{r}} = w. \tag{8.29}$$

A pálya mentén a LSF értéke a nyomás

$$\Lambda = \varrho\left(-\epsilon + \dot{\Phi}\right) = \varrho\left(w - \epsilon\right) = p. \tag{8.30}$$

8.4.3. A GR Euler egyenlet

A variációs egyenletek felhasználásával megkaphatjuk a nemrelativisztikus Euler egyenlet GR általánosítását.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}wu_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{c^2}\left(wu_i\right)_{;j}u^j = \left(\Phi_{,i;j} + \eta s_{,i;j} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_{,i;j}\right)u^j - Ts_{,i}, \tag{8.31}$$

mert $\dot{\boldsymbol{v}} = 0$ és $\dot{\eta} = -T$. Kihasználjuk, hogy skalár mennyiség kovariáns gradiens tenzora szimmetrikus és $\mathrm{d}w = T\mathrm{d}s + \mathrm{d}p/\varrho$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}wu_i}{\mathrm{d}\tau} = -Ts_{,i} + (\Phi_{,j;i} + \eta s_{,j;i} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_{,j;i})\, u^j \tag{8.32}$$

$$= -Ts_{,i} + \dot{\Phi}_{,i} + \eta\dot{s}_{,i} - \boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{r}}_{,i} - (\Phi_{,j} + \eta s_{,j} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_{,j})\, u^j_{;i} \tag{8.33}$$

$$= -Ts_{,i} + w_{,i} - \frac{w}{c^2}u_j u^j_{;i} = \frac{p_{,i}}{\varrho}. \tag{8.34}$$

Ez a nemrelativisztikus Euler egyenlet természetes általánosítása, azzal a kiegészítéssel, hogy a tehetetlen tömegsűrűség helyén az entalpia jelenik meg! Szétbontva

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}wu_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\dot{w}}{c^2}u_i + \frac{w}{c^2}\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_{,i}}{\varrho}. \tag{8.35}$$

A sebességgel párhuzamos komponens $\dot{w} = \frac{\dot{p}}{\varrho}$, ez éppen az adiabacitási feltétel, a sebességre merőleges pedig

$$\frac{w}{c^2}\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_{,j}}{\varrho}\left(g^j_i - \frac{u_i u^j}{c^2}\right). \tag{8.36}$$

8.4.4. Energia-impulzus tenzorok

–> Kanonikus EIT: a Λ-ban (első) deriváltjaikkal fellépő mennyiségek a Φ, s, r^a skalárok, a deriváltak lineárisan jelennek meg

$$T_i^{\ j} = \varphi_{\alpha,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi_{\alpha,j}} - g^j_i\Lambda = \varrho\,(\Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_{,i})\, u^j - g^j_i p \tag{8.37}$$

$$= \varrho\frac{w}{c^2}u_i u^j - g^j_i p, \tag{8.38}$$

szimmetrikus és kovariáns.

–> Hilbert EIT:

$$T^{\mathrm{H}ij} = 2\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{ij}} - g^{ij}\Lambda = \varrho\frac{w}{c^2}u^i u^j - g^{ij}p. \tag{8.39}$$

A két tenzor azonos!

8.4.5. Izotróp expanzió

Tekintsük azt az SR problémát, amikor egy folyadékgömb adiabatikusan tágul. Történhet-e ez időfüggetlen sebességtérrel, azaz megoldja-e ilyen az EE-et? Hogyan csökken a sűrűség az időben?

Tegyük fel, hogy a folyadékelemek trajektóriája a sajátidőben lineáris

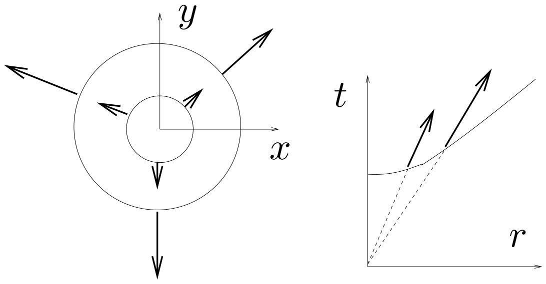
$$x^i = \tau u^i(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} = u^i(\boldsymbol{r}), \tag{8.40}$$

ahol $\boldsymbol{r}$ a kezdeti ($\tau = 1$-beli) feltételeket parametrizálja. A sebességtér a sajátidőtől nem, csak a kezdeti feltételektől függ. Legyen $c = 1$, ekkor

$$\sqrt{x_i x^i} = \tau\sqrt{u_i u^i} = \tau \quad \Rightarrow \quad \tau_{,i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_j x^j}} = u_i. \tag{8.41}$$

Lehetséges parametrizáció $u_i u^i = 1$ mellett

$$u^i(\boldsymbol{r}) = (\cosh\eta, \sinh\eta\,\cos\varphi\,\sin\vartheta, \sinh\eta\,\sin\varphi\,\sin\vartheta, \sinh\eta\,\cos\vartheta)\,. \tag{8.42}$$



18. ábra. Az elmozdulástér valós térben (bal) és a $t - r$ síkban (jobb). A $\tau = \mathrm{const}$ görbék a térben gömbök, a $t - r$ síkban hiperbolák.

Az Euler egyenlet sebességre normális vetülete

$$w\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = \left(g_i^j - u_i u^j\right) p_{,j}, \tag{8.43}$$

ahol most w az entalpiasűrűség, a korábbi ϱw. Tegyük fel, hogy a kezdeti nyomás homogén volt, s keressük a megoldást csak a sajátidőtől függő $p = p(\tau)$ alakban. Mivel

$$p(\tau)_{,i} = \dot{p}\,\tau_{,i} = \dot{p}\,u_i, \tag{8.44}$$

azért az Euler egyenlet jobboldala eltűnik. Tehát az időben állandó sebességtér valóban kielégíti az Euler egyenletet!

Kontinuitás

$$0 = \left(\varrho u^i\right)_{,i} = \varrho_{,i} u^i + \varrho u^i_{,i} \quad \Rightarrow \quad u^i_{,i} = -\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}. \tag{8.45}$$

A sebességtér divergenciája

$$u^i_{,i} = \left(\frac{x^i}{\tau}\right)_{,i} = \frac{4}{\tau} - \frac{x^i\,\tau_{,i}}{\tau^2} = \frac{4}{\tau} - \frac{u_i u^i}{\tau} = \frac{3}{\tau}. \tag{8.46}$$

A sűrűség diffegyenlete tehát

$$\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -\frac{3}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \varrho \propto \tau^{-3}. \tag{8.47}$$

Az energiasűrűségre

$$\dot{e} = w\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -\frac{3}{\tau}(e+p), \tag{8.48}$$

ha mármost ultrarelativisztikus állapotegyenletet, $e = 3p$, tételezünk fel, akkor

$$\frac{\dot{e}}{e} = -\frac{4}{\tau} \quad \Rightarrow \quad e \propto \tau^{-4}. \tag{8.49}$$

Az $e \propto T^4$ Stefan-Boltzmann reláció alapján a hőmérséklet csökkenése $T \propto \tau^{-1}$.

8.2. Házi feladat. *Mutassuk meg, hogy az EIT divergenciájának eltűnése ekvivalens az Euler egyenlettel. (15%)*

8.3. Házi feladat. *Állítsunk fel csak sebességpotenciálokkat tartalmazó variációs elvet. Emlékezetetünk arra, hogy* $w\,u_i/c^2 = \Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_{,i}$*, továbbá a LSF a pálya mentén a nyomás. Legyen ismert az állapotegyenlet* $p = p(w,s)$ *és tekintsük a*

$$\Lambda = p(c\,|\Phi_{,i} + \eta s_{,i} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_{,i}|\,, s) \tag{8.50}$$

LSF-t. Írjuk fel a mozgásegyenleteket és az EIT-ket. (40%)

8.4. Házi feladat. *Dolgozzuk ki a GR hidrodinamika variációs elméletét Lagrange koordinátákkal. Célszerű előbb átgondolni a korábban bemutatott nemrelativisztikus tárgyalást, majd ezt relativisztikusan átfogalmazni. (Előre beadandó, 80%.)*

8.5. Házi feladat. *SR-ben* $T_i{}^j{}_{,j} = 0$*. Mutassuk meg, hogy kis sebességek esetén, labor rendszerben, az ismert nemrelativisztikus egyenleteket kapjuk vissza. (15%)*

9. Az elektromágneses tér mint klasszikus térelmélet

9.1. Térerősség tenzor

A potenciálelőállítás a vákuumegyenleteket automatikusan teljesíti (közeg nélkül $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{H} = 0, \\ \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\varphi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Négyes írásmód

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{pmatrix} \varphi \\ -\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \\ E_a &= A_{a,0} - A_{0,a} \\ H_a &= \varepsilon_{abc} A_{b,c} \end{aligned} \tag{9.2}$$

A térerősség tenzor

$$F_{ij} = A_{j;i} - A_{i;j} = A_{j,i} - A_{i,j}, \tag{9.3}$$

részletesen

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{ji} \tag{9.4}$$

azaz, ha $i, j = 0 \ldots 3$ és $a, b = 1, 2, 3$

$$F_{0a} = E_a, \tag{9.5}$$

$$F_{ab} = -\epsilon_{abc} H_c. \tag{9.6}$$

A kovariáns derivált formulája alapján belátható, hogy

$$A_{j;i;k} - A_{i;j;k} + A_{i;k;j} - A_{k;i;j} + A_{k;j;i} - A_{j;k;i} = 0. \tag{9.7}$$

9.1. Gyakorló feladat. *Vezessük le a fenti azonosságot.*
Innen

$$F_{ij;k} + F_{jk;i} + F_{ki;j} = 0 \Longleftrightarrow \varepsilon^{ijkl} F_{ij;k} = 0, \tag{9.8}$$

ahol ε^{ijkl} a Levi-Cività szimbólum. Ez az azonosság azzal van kapcsolatban, hogy adott pontban a tér Minkowski-ba transzformálható. Bevezetve a

$$\overline{F}^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl} F_{kl} \tag{9.9}$$

duális tenzort, a következő egyszerű egyenletet kapjuk

$$\overline{F}^{ij}{}_{;j} = 0. \tag{9.10}$$

9.1. Házi feladat. *Mutassuk meg, hogy (9.10) éppen a két vákuum egyenletet adja. (15%)*

9.2. Hamilton elv a potenciálokra

A ME-ek lineárisak, ezért a LSF kvadratikus. Az egyetlen kvadratikus valódi skalár

$$\Lambda_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} = \frac{E^2 - H^2}{8\pi}, \tag{9.11}$$

ahol a második formula Minkowski térben érvényes.

9.2. Gyakorló feladat. *Írjuk fel a LSF-t általános metrika esetén a terekkel. Ehhez használjuk fel, hogy a térerősség tenzor alsó indexes komponenseit definiáltuk az **E** és **H** komponenseivel.*

Az LSF-ben a $-1/16\pi$ prefaktort az anyagi egyenletekhez való későbbi illesztés céljából írtuk. A hatás tetszőleges görbevonalú koordinátákkal

$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda_{\mathrm{EM}} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x. \tag{9.12}$$

A dinamikai változó az $A_i(x)$ tér. Variálásához először számítsuk ki az $A_{i,j}$ szerinti deriváltat

$$\frac{\partial \Lambda_{\mathrm{EM}}}{\partial A_{i,j}} = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \frac{\partial F_{kl}}{\partial A_{i,j}} = -\frac{1}{4\pi} F^{ji}, \tag{9.13}$$

ahonnan

$$0 = \frac{\delta S}{\delta A_i} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{ij}\sqrt{-g}\right)_{,j}\frac{1}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{4\pi}F^{ij}{}_{;j}. \tag{9.14}$$

Az utolsó azonosság csak antiszimmetrikus tenzor kovariáns divergenciájára igaz!

9.3. Gyakorló feladat. *Mutassuk meg, hogy antiszimmetrikus tenzor kovariáns divergenciája valóban előáll a fenti közönséges divergencia alakjában.*

Ez éppen a második ME pár (az anyagi egyenletek vákuumban), SR-ben $i = 0$ mellett kapjuk $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} = 0$, míg $i = 1, 2, 3$-ra $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$. GR-ben az anyagi egyenletekben megjelennek a Christoffel-szimbólumok.

A ME-eket vákuumban a következő szimmetrikus alakban kaptuk

$$F^{ij}{}_{;j} = 0, \qquad \bar{F}^{ij}{}_{;j} = 0. \tag{9.15}$$

9.3. Hamilton-elv a térerősségekre

Felmerülhet a kérdés, miért nem tekintettük az $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{H}$ tereket, amelyek a mérhető fizikai mennyiségek, dinamikai változóknak. Az összes ME-et hat változó variálásából nem kaphatjuk meg, nyilván mellékfeltételeket kell kirónunk.

9.3.1. A vákuum egyenletek, mint kényszerek

Adjuk az előző LSF-hez hozzá a vákuum egyenleteket kényszerfeltételként előállító alábbi tagot

$$\bar{\Lambda}_{\mathrm{K}} = \frac{1}{8\pi}\bar{F}^{kl}{}_{;k}\bar{A}_l = \frac{1}{8\pi}\varepsilon^{ijkl}F_{ij;k}\bar{A}_l = \frac{1}{8\pi\sqrt{-g}}\varepsilon^{ijkl}(\sqrt{-g}F_{ij})_{,k}\bar{A}_l, \tag{9.16}$$

ahol $\bar{A}_l$ multiplikátor tér. A $\Lambda_{\mathrm{EM}} + \bar{\Lambda}_{\mathrm{K}}$ teljes LSF-t a térerősségek szerint variálva a hiányzó egyenletek adódnak (a , helyébe ; is írható az antiszimmetrikus tenzorral szorzás okából)

$$\begin{aligned}(\delta F_{ij}): \qquad -\frac{1}{16\pi}2\cdot 2F^{ij} &= \frac{1}{8\pi}2\varepsilon^{ijkl}\bar{A}_{l,k} \\ \Rightarrow \quad F^{ij}{}_{;j} &= 0.\end{aligned} \tag{9.17}$$

Az antiszimmetria következménye az extra 2 faktor, a második sor a (9.7) vektoranalitikai azonosságból származik.

Vegyük észre, hogy az $\bar{A}_i$ tér éppen a duális tenzor vektorpotenciálja!

9.3.2. Az anyagi egyenletek, mint kényszerek

Megfordítva, vezessük le a vákuum egyenleteket, az anyagiakat kényszernek tekintve:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathrm{K}} &= \frac{1}{4\pi} F_{ij}{}^{;j} A^i \\ (\delta F_{ij}): \qquad -\frac{1}{4\pi} F^{ij} &= \frac{1}{4\pi}(A^{i,j} - A^{j,i}). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Azaz A_i éppen a vektorpotenciál, innen a vákuum egyenletek következnek.

Tanulság: A Hamilton-elv nem egyértelmű, hasonlóan ahhoz, amit a hidrodinamikai példákban láttunk. Az összes mozgásegyenletet nem tudjuk származtatni, ezért el kell döntenünk, mit tekintünk előzőleg ismertnek és mit kívánunk levezetni, s a hatásfunkcionált ennek megfelelően kell megválasztanunk.

9.4. Az energia-impulzus tenzor

A Hilbert-féle EIT (mivel a LSF nem függ g_{ij} deriváltjaitól)

$$T^{\mathrm{H}}_{ij} = 2\frac{\partial \Lambda_{\mathrm{EM}}}{\partial g^{ij}} - g_{ij}\Lambda_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{4\pi} F_{ik} F_j{}^k + g_{ij}\frac{F_{kl}F^{kl}}{16\pi}. \tag{9.19}$$

A kanonikus EIT

$$T_i^{\ j} = A_{k,i}\frac{\partial \Lambda_{\mathrm{EM}}}{\partial A_{k,j}} - g_i^j \Lambda_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{4\pi} A_{k,i} F^{jk} + g_i^j \frac{F_{kl}F^{kl}}{16\pi}. \tag{9.20}$$

Vizsgáljuk a két tenzor különbségét, amely $\tilde{T}_i^{\ j} = A_{i,k}F^{jk}$-val arányos. Mivel $F^{jk}_{\ \ ;k} = 0$ a pálya mentén, azért

$$\tilde{T}_i^{\ j} = \tilde{T}_i^{\ j} + A_i F^{jk}_{\ \ ;k} = \tilde{T}_i^{\ j} + \frac{A_i}{\sqrt{-g}}\left(F^{jk}\sqrt{-g}\right)_{,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(A_i F^{jk}\sqrt{-g}\right)_{,k} \tag{9.21}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\tilde{T}_i^{\ j}\sqrt{-g}\right)_{,j} = 0. \tag{9.22}$$

Éppen a fenti alakú, nem-kovariáns "divergencia" jelenik meg a kanonikus EIT (8.6) mérlegegyenletében. Tehát a $\tilde{T}/4\pi$ tenzort a kanonikus EIT-hez adva a mérlegegyenlet nem változik, ezért tekinthetjük az alábbi tenzort kanonikus EIT-nek

$$T_i^{\ j} = -\frac{1}{4\pi} F_{ik} F^{jk} + g_i^j \frac{F_{kl} F^{kl}}{16\pi}. \tag{9.23}$$

Ez szimmetrikus, kovariáns, s megegyezik a Hilbert-féle EIT-vel! A szokásos jelöléssel

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} u & \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_{\mathrm{u}} \\ c\boldsymbol{p} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{9.24}$$

részletesen kiírva Minkowski térben

$$\begin{aligned} T^{00} &= -\frac{1}{4\pi} F^0_{\ a} F^{0a} - \Lambda_{\mathrm{EM}} = \frac{E^2}{4\pi} + \frac{H^2 - E^2}{8\pi} = \frac{H^2 + E^2}{8\pi} = u, \\ T^{a0} &= -\frac{1}{4\pi} F^{ab} F^0_{\ b} = \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{abc} H_c E_b = \frac{1}{4\pi} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_a = \frac{1}{c} \boldsymbol{j}_{\mathrm{u}a} = c p_a, \\ T^{ab} &= -\frac{1}{4\pi} F^a_{\ k} F^{bk} + \delta_{ab} \Lambda_{\mathrm{EM}} = \delta_{ab} u - \frac{E_a E_b + H_a H_b}{4\pi} = \sigma_{ab}. \end{aligned} \tag{9.25}$$

A σ a Maxwell-féle feszültség tenzor, a $\boldsymbol{j}_{\mathrm{u}} = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ a Poynting vektor.

9.2. Házi feladat. *Mutassuk meg a ME-ek alapján, hogy $T^{ij}{}_{;j} = 0$ (15%). Ezt természetesen tudjuk a Hilbert-féle tenzorról, itt expliciten meg kell mutatni.*

9.3. Házi feladat. *Általában mikor teljesül a Hilbert tenzorra is a kanonikus tenzorra vonatkozó mérlegegyenletet? (15%). (A hidrodinamikai és elektromágneses térelméletekben teljesült.)*

9.5. Tér és anyag kölcsönhatása

9.5.1. Adott pályájú azonos töltések

$$\Lambda = \Lambda_{\mathrm{EM}} + \Lambda_{\mathrm{I}}, \tag{9.26}$$

ahol a (nyugalmi) térfogategységre eső részecskeszámot n-nel jelölve

$$\Lambda_{\mathrm{I}} = -\frac{e}{c} n u^i A_i = -\frac{1}{c} j^i A_i. \tag{9.27}$$

Az együtthatót az indokolja, hogy $-\frac{1}{c} j^0 A_0 = -\varrho\varphi$, a sztatikus potenciális energiasűrűség -1-szerese. A variáció (9.14) alapján

$$(\delta A_i): \quad -\frac{1}{4\pi} F^{ij}{}_{;j} - \frac{1}{c} j^i = 0, \tag{9.28}$$

$$\Rightarrow \qquad F^{ij}{}_{;j} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{9.29}$$

Ezek éppen az anyagi ME-ek. A Λ_{EM}-ben korábban definiált $-1/16\pi$ együtthatót tehát jól választottuk.

A kovariáns anyagi egyenlettel a kontinuitás összhangban van

$$-\frac{4\pi}{c} j^i{}_{;i} = F^{ij}{}_{;j;i} = \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{ij})_{,j} \right)_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{ij})_{,i,j} = 0. \tag{9.30}$$

A labor rendszerben az elektromos áramsűrűség

$$j^i = \begin{pmatrix} c\varrho \\ \boldsymbol{j} \end{pmatrix}, \tag{9.31}$$

és Minkowski térben a szokásos formulákat kapjuk

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{E} = 4\pi\varrho, \tag{9.32}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}. \tag{9.33}$$

9.5.2. Adott térben mozgó töltés

Korábban vizsgáltuk az anyagi Lagrange függvényt

$$L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{I}} = -mc^2 + \frac{\nu}{2}\left(1 - g_{ij}\frac{u^i u^j}{c^2}\right) - \frac{e}{c} u^i A_i. \tag{9.34}$$

Mint korábban láttuk, $\nu = mc^2$, s (7.35) alapján

$$m\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{e}{c}(A_{i,j} - A_{j,i})u^j = \frac{e}{c} F_i{}^j u_j, \tag{9.35}$$

ez a Lorentz erőtörvény. Használva az $u^i = (c\gamma, \boldsymbol{v}\gamma)$ alakot, γ-val egyszerűsítés után Minkowski térben a szokásos formulát kapjuk

$$m\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}. \tag{9.36}$$

9.5.3. Tér és anyag kölcsönható dinamikája

$$\Lambda = \Lambda_{\mathrm{EM}} + \Lambda_{\mathrm{I}} + \Lambda_{\mathrm{A}} + \Lambda_{\mathrm{K}}, \tag{9.37}$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{\mathrm{EM}} &= -\frac{1}{8\pi}(A_{i;j}-A_{j;i})A_{k;l}g^{ik}g^{jl} \\
\Lambda_{\mathrm{I}} &= -\frac{e}{c}nu^iA_i \\
\Lambda_{\mathrm{A}} &= -nmc^2+\frac{n\nu}{2}\left(1-g_{ij}\frac{u^iu^j}{c^2}\right) \\
\Lambda_{\mathrm{K}} &= n\left(\dot{\phi}-\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{r}}\right).
\end{aligned}
\tag{9.38}
$$

Az anyagi részt termodinamika nélküli töltött porfelhőnek tekintjük (ütközésmentes plazma), $T=0$, $p=0$, $\varepsilon=c^2=w$. A dinamikai mezők $u^i, A_i, n, \nu, \phi, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}$, mint azt korábban a hidrodinamika variációs elvénél tárgyaltuk. Mivel $T=0$, entropikus tag nem lép fel. Az egyszerűség kedvéért egynemű részecskéket tekintünk, ezeket az n részecskeszám sűrűséggel írjuk le, a tömegsűrűség mn, a töltéssűrűség en, az anyagi és elektromos kontinuitás egyenértékű.

ELE:

$$
\begin{aligned}
&(\delta A_i): && F^{ij}{}_{;j}=-\frac{4\pi}{c}j^i \\
&(\delta\phi): && \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}nu^i)_{,i}=(nu^i)_{;i}=0 \quad \text{kontinuitás} \\
&(\delta\boldsymbol{v}): && \dot{\boldsymbol{r}}=0 \\
&(\delta\boldsymbol{r}): && \dot{\boldsymbol{v}}=0 \quad (\delta\phi)\text{-t felhasználva} \\
&(\delta u^i): && \frac{\nu}{c^2}u_i=-\frac{e}{c}A_i+\phi_{,i}-\boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_{,i} \quad \text{sebességpotenciál} \\
&(\delta n): && -mc^2-\frac{e}{c}u^iA_i+\dot{\phi}=0 \quad \to \quad \nu=mc^2
\end{aligned}
\tag{9.39}
$$

Könnyen megmutatható, hogy összhangban a pontmechanikai eredménnyel

$$
m\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}\tau}=\frac{e}{c}F_i{}^ju_j, \tag{9.40}
$$

vagy n-el szorozva

$$
mn\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{c}F_i{}^jj_j. \tag{9.41}
$$

9.4. Házi feladat. *Vezessük le a relativisztikus magnetohidrodinamika mozgásegyenleteit ideális folyadékra. (35%) (Útmutatás: az anyagi Lagrange függvény legyen mínusz a belső energia.)*

9.5.4. Energia impulzus tenzor

Λ_{I} nem ad járulékot, azaz az EIT az anyag és tér EIT-ainak összege. Mivel $p=0$, azért

$$T_{ij} = mnu_iu_j + \frac{g_{ij}}{16\pi}F^{kl}F_{kl} - \frac{1}{4\pi}F_{ik}F_j{}^k. \tag{9.42}$$

9.5. Házi feladat. *Mutassuk meg, hogy a Lorentz erőtörvényből következik $T^{ij}{}_{;j}=0$. (15%)*

9.5.5. Mértékinvariancia

Vegyük észre, hogy az $A_i + \varphi_{,i} \to A_i$ és $\phi + \frac{e}{c}\varphi \to \phi$ helyettesítésre a $-\frac{e}{c}A_iu^i + \dot{\phi}$ tag, s ezért a teljes LSF invariáns. Innen látszik, hogy a mértékinvariancia a töltésmegmaradással áll kapcsolatban, hiszen a ϕ segédteret a kontinuitás miatt vettük fel. Rögzítsük

a mértéket úgy, hogy a „régi" vektorpotenciállal teljesüljön

$$\Box\varphi = \varphi_{,i}{}^{;i} = -A_i{}^{;i}, \tag{9.43}$$

ebből következően az új A_i divergenciamentes — ez a Lorentz mérték. További szabadsági fokunk is maradt, ugyanis a $\Box\varrho=0$-t kielégítő additív ϱ tér erejéig φ határozatlan. Ezt rögzítheti az, ha a határon nem változtatjuk a vektropotenciált, azaz ott $\varphi_{,i}$ eltűnik.

9.5.6. Hullámegyenlet görbült téridőben

Idézzük fel a Riemann és Ricci tenzorokról

$$\begin{aligned} V^i{}_{;j;k} - V^i{}_{;k;j} &= R^i{}_{mjk}V^m, && (9.44)\\ R^j{}_{ikj} &= -R_{ik}. && (9.45) \end{aligned}$$

Az anyagi ME-ekből

$$F_i{}^j{}_{;j} = -\frac{4\pi}{c}j_i = A^j{}_{;i;j} - A_i{}^{;j}{}_{;j} = A^j{}_{;j;i} + R^j{}_{kij}A^k - A_i{}^{;j}{}_{;j}. \tag{9.46}$$

Lorentz mértékben $A^j{}_{;j} = 0$, innen a kovariáns hullámegyenletet kapjuk

$$\Box A_i + R_i{}^k A_k = \frac{4\pi}{c} j_i. \tag{9.47}$$

Töltésmentes térben, gyenge gravitáció mellett

$$\Box A_i = 0. \tag{9.48}$$

A megoldás

$$A_i(x) = a_i(k_j x^j), \quad \text{ahol} \quad k_i k^i = 0 \tag{9.49}$$

9.6. Házi feladat. *Írjuk fel az eikonál egyenletet görbült térben, azaz keressük a hullámegyenlet megoldását $A_j = a_j e^{iS(x)}$ alakban, feltéve, hogy S lassan változik. (15%)*

10. Az elektromágneses tér speciális relativisztikus tulajdonságai

10.1. Kvadratikus invariánsok

A térerősség tenzorból két kvadratikus invariáns származtatható

$$\frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} = H^2 - E^2 \quad \text{illetve,} \quad -\frac{1}{4} \varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{H} \tag{10.1}$$

Az első mennyiség skalár, a második pszeudoskalár mivel egy axiálvektor és egy polárvektor skaláris szorzata, és ezért tértükrözésnél előjelet vált. A fenti két menyiség invarianciájának következményeit a téridő valamely adott pontjában az alábbiakban foglaljuk össze.

– Ha van olyan IR, ahol $E = H$ és $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$, akkor ez minden IR-ben fennáll.

– Ha $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$, és $E \neq H$ akkor megengedett, hogy

$$\text{ha } H > E \Rightarrow \text{létezzék IR, hogy } E = 0$$
$$\text{ha } E > H \Rightarrow \text{létezzék IR, hogy } H = 0$$

– Ha $\boldsymbol{EH} \neq 0$ akkor létezhet IR, hogy $H \| E$

Ha $\boldsymbol{H} \| \boldsymbol{E} \| \boldsymbol{n}_x$, akkor

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \tag{10.2}$$

Ha tehát $\boldsymbol{EH} \neq 0$, akkor T_{ij}-t Lorentz-transzformáció diagonalizálja, éspedig olyan IR-be vivő transzformáció, amelyben a két tér párhuzamos valamely koordinátatengellyel.

10.2. A térerősségek Lorentz transzformáltja

Idézzük fel az $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}/v$ irányú „boost" Lorentz transzformációjának mátrixát

$$\Lambda^i{}_j(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\beta & -\boldsymbol{n}\mathrm{sh}\beta \\ -\boldsymbol{n}\mathrm{sh}\beta & \mathbf{I} + (\mathrm{ch}\beta - 1)\boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{n} \end{pmatrix}, \tag{10.3}$$

amely szerint négyesvektorokra

$$\begin{aligned} a'^i &= \Lambda^i{}_j(\boldsymbol{v}) a^j, \\ a^i &= \Lambda^i{}_j(-\boldsymbol{v}) a'^j. \end{aligned} \tag{10.4}$$

A térerősség tenzor transzformációja (a $\Lambda = \Lambda(-\boldsymbol{v})$ jelöléssel)

$$F^{ij} = \Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_l F'^{kl}. \tag{10.5}$$

Az elektromos tér transzformációja

$$\begin{aligned}
E_a = F^{a0} &= \Lambda^a{}_k \Lambda^0{}_l F'^{kl} = \\
&= -\underbrace{\Lambda^a{}_0 \Lambda^0{}_b E'_b}_{(k,l)=(0,b)} + \underbrace{\Lambda^a{}_b \Lambda^0{}_0 E'_b}_{(k,l)=(b,0)} - \underbrace{\Lambda^a{}_b \Lambda^0{}_c \varepsilon_{bcd} H'_d}_{(k,l)=(b,c)} \\
&= (-n_a n_b \mathrm{sh}^2\beta + \mathrm{ch}\beta[\delta_{ab} + (\mathrm{ch}\beta - 1) n_a n_b]) E'_b - \\
&\quad - n_c \mathrm{sh}\beta(\delta_{ab} + (\mathrm{ch}\beta - 1) n_a n_b) \varepsilon_{bcd} H'_d = \\
&= (\mathrm{ch}\beta\, \delta_{ab} + n_a n_b (1 - \mathrm{ch}\beta)) E'_b - \mathrm{sh}\beta\, \varepsilon_{acd} n_c H'_d.
\end{aligned} \tag{10.6}$$

A $\boldsymbol{H}$-ra vonatkozó transzformációt közvetlen számítással, de a $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{E}$ és $-\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}$ helyettesítéssel is megkaphatjuk. Ez utóbbi annak felel meg, hogy (10.6) számítást a duális $\bar{F}$ tenzorral végezzük. Összegezve

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= (\mathrm{ch}\beta\, \mathbf{I} - (\mathrm{ch}\beta - 1) \boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{n}) \boldsymbol{E}' - \mathrm{sh}\beta\, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}', \\
\boldsymbol{H} &= (\mathrm{ch}\beta\, \mathbf{I} - (\mathrm{ch}\beta - 1) \boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{n}) \boldsymbol{H}' + \mathrm{sh}\beta\, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}'.
\end{aligned} \tag{10.7}$$

A boost irányába eső ill. arra merőleges komponenseket kiírva

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{n}\boldsymbol{E}', \\
\boldsymbol{n}\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{n}\boldsymbol{H}', \\
\boldsymbol{E}_\perp &= \mathrm{ch}\beta\, \boldsymbol{E}'_\perp - \mathrm{sh}\beta\, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}'_\perp, \\
\boldsymbol{H}_\perp &= \mathrm{ch}\beta\, \boldsymbol{H}'_\perp + \mathrm{sh}\beta\, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}'_\perp.
\end{aligned} \tag{10.8}$$

A boost irányú komponensek nem változnak!

10.3. Példák

- x irányú boost

  Ha $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$, akkor

$$\begin{aligned}
E_1 &= E'_1, \\
E_2 &= \mathrm{ch}\beta\, E'_2 + \mathrm{sh}\beta\, H'_3, \\
E_3 &= \mathrm{ch}\beta\, E'_3 - \mathrm{sh}\beta\, H'_2,
\end{aligned} \tag{10.9}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= H_1', \\ H_2 &= \mathrm{ch}\beta\, H_2' - \mathrm{sh}\beta\, E_3', \\ H_3 &= \mathrm{ch}\beta\, H_3' + \mathrm{sh}\beta\, E_2'. \end{aligned} \tag{10.10}$$

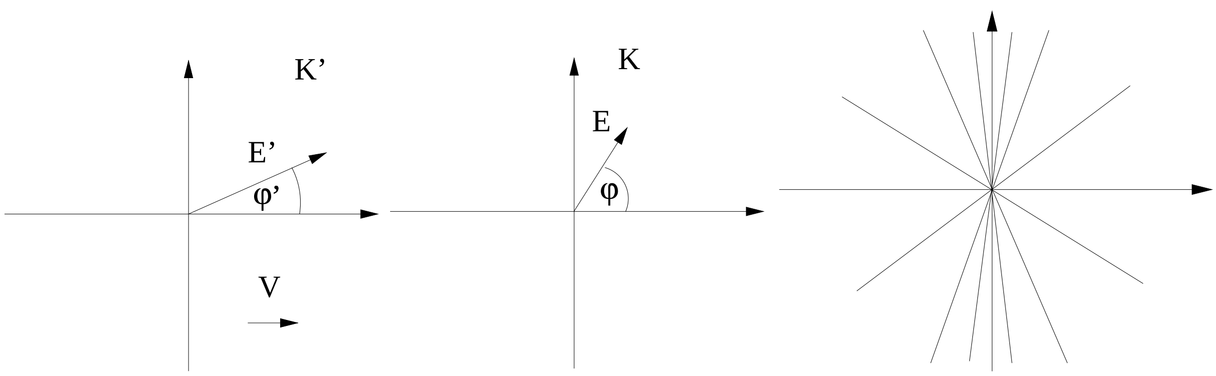
- Szögek Lorentz transzformációja

  Legyen a boost $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ irányú, s a $\mathcal{K}'$-ben a mágneses tér zérus.

$$\mathrm{tg}\varphi' = \frac{E_2'}{E_1'} \tag{10.11}$$

  A térerősségek transzformációja alapján:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\mathrm{ch}\beta E_2'}{E_1'} = \mathrm{ch}\beta\,\mathrm{tg}\varphi'. \tag{10.12}$$



19. ábra. A térerősségek által bezárt szög transzformációja. A K'-vel mozgó ponttöltés centrális erőtere a K-ból nézve a sebességre merőleges síkban sűrűsödni látszik. (Az első két ábrát összehasonlítva hibát fedezhetünk fel: mit ábrázoltunk rosszul?)

- Mi a fizikai jelentése a sebesség dimenziójú $\boldsymbol{S}/u$ mennyiségnek?

  Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{EH} \neq 0$, azaz $\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{0}$. Alkalmazzunk olyan boost-ot, amely párhuzamossá transzformálja a tereket, $\boldsymbol{E}' || \boldsymbol{H}'$, ehhez elég az $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{H}'$ komponenst megtalálni, mert újabb || irányú boost a tereket már nem változtatja.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \mathrm{ch}\beta\boldsymbol{E}' - \mathrm{sh}\beta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H'} \\ \boldsymbol{H} &= \mathrm{ch}\beta\boldsymbol{H'} + \mathrm{sh}\beta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}'\end{aligned} \tag{10.13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} =&\mathrm{ch}\beta\mathrm{sh}\beta(\boldsymbol{E}'\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}')+\boldsymbol{H'}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H'})) \\ =&\mathrm{ch}\beta\mathrm{sh}\beta\boldsymbol{n}(E'^2+{H'}^2)\end{aligned} \tag{10.14}$$

$$\begin{aligned}E^2+H^2 =&\mathrm{ch}^2\beta E'^2+\mathrm{sh}^2\beta {H'}^2+\mathrm{ch}^2\beta {H'}^2+\mathrm{sh}^2\beta E'^2 = \\ =&(\mathrm{ch}^2\beta+\mathrm{sh}^2\beta)(E'^2+{H'}^2)\end{aligned} \tag{10.15}$$

Ebből:

$$\frac{\boldsymbol{S}}{u} = c\boldsymbol{n}\,\frac{2\mathrm{ch}\beta\mathrm{sh}\beta}{\mathrm{ch}^2\beta+\mathrm{sh}^2\beta} = c\boldsymbol{n}\,\mathrm{th}2\beta \tag{10.16}$$

Az $\boldsymbol{S}/u$ semmilyen fizikai mennyiség áramlási sebességét nem jelenti, hiszen nem négyesvektor térbeli része! Mégis van fizikai jelentése: a hozzá tartozó sebességparaméter fele jellemzi annak az IR-nek a relatív sebességét, amelyből a terek párhuzamosnak látszanak.

- Doppler-effektus

Vizsgáljuk meg egy $\boldsymbol{v}$ sebességgel mozgó részecske által kibocsátott fény frekvenciáját! A hullámot a négyes hullámszámvektor jellemzi

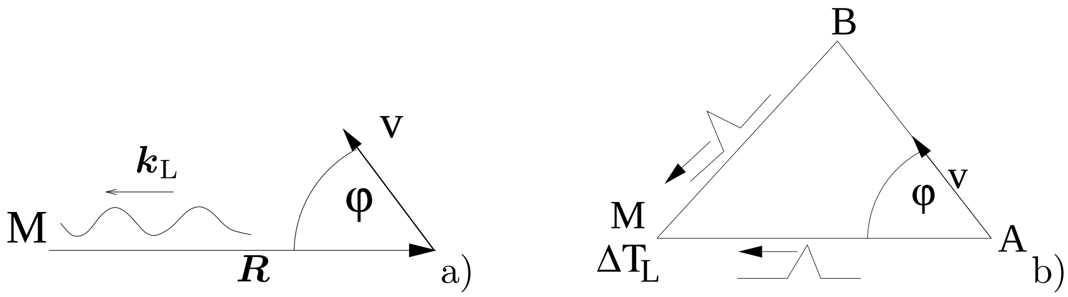
$$A_i(x) = a_i(k_j x^j), \qquad k_j k^j = 0, \tag{10.17}$$

ahol

$$k^i = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}, \tag{10.18}$$

és minden IR-ben $\omega^2 = c^2k^2$. A megfigyelő IR-ét tekintsük labor rendszernek, ekkor a (10.3) Lorentz transzformáció szerint k^0 kifejezhető k^i_{L}-vel

$$\frac{\omega}{c} = \mathrm{ch}\beta\frac{\omega_{\mathrm{L}}}{c} - \mathrm{sh}\beta\boldsymbol{n}\boldsymbol{k}_{\mathrm{L}} = \mathrm{ch}\beta\frac{\omega_{\mathrm{L}}}{c} - \mathrm{ch}\beta\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{k}_{\mathrm{L}}}{c} = \mathrm{ch}\beta\left(1-\frac{v}{c}\cos\varphi\right)\frac{\omega_{\mathrm{L}}}{c}. \tag{10.19}$$



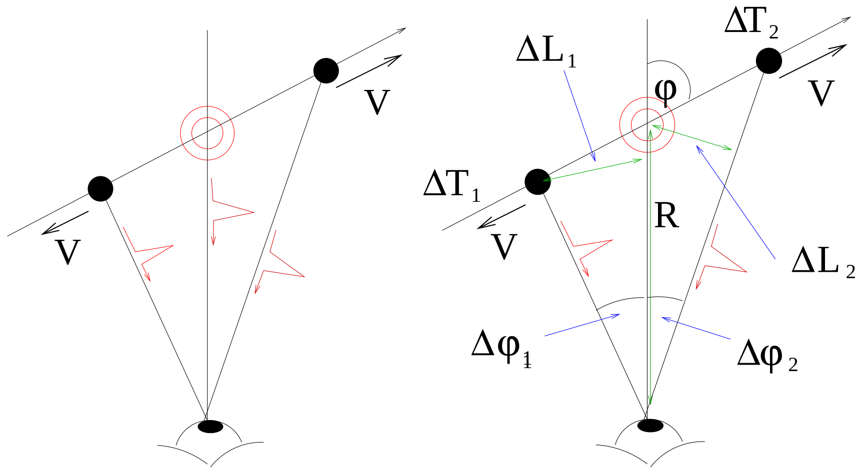
20. ábra. Doppler effektus. Az M megfigyelő észleli a $\boldsymbol{v}$ sebességű forrás által kibocsájtott fényt. Az a) ábra a négyesformalizmust, a b) a direkt számolást illusztrálja.

A fenti eredményt elemi megfontolások alapján is megkaphatjuk. Tegyük fel, hogy a fényforrást R távolságból figyeljük, továbbá az ΔT sajátidőközönként fényjelet bocsájt ki, és mi ezt ΔT_L labor időközönként észleljük. Ekkor az első fényjel kibocsájtása és a második beérkezése között eltelt idő labor rendszerben

$$\begin{aligned} \frac{R}{c} + \Delta T_L &= \Delta T \mathrm{ch}\beta + \frac{1}{c}\sqrt{R^2 + v^2 \Delta T^2 \mathrm{ch}^2\beta - 2\cos\varphi\, R\, v\, \Delta T\, \mathrm{ch}\beta} \\ &\Rightarrow\ \Delta T_L \approx \Delta T \mathrm{ch}\beta (1 - \frac{v}{c}\cos\varphi), \end{aligned} \tag{10.20}$$

amely ekvivalens a Lorentz transzformációból kapott (10.19) formulával. A frekvenciák transzformációs képlete fényjelek kibocsájtásával kapcsolatos rövid időkülönbségekre is érvényes, ezt a következő példában alkalmazzuk.

- Csillag két plazmafelhőt bocsájt ki: fénysebességnél gyorsabb látszólagos mozgás (Fizikai diákolimpiai feladat, ld. Fiz. Szemle, 1998/8-9.)



21. ábra. A csillagrobbanás vázlata és a paraméterek magyarázata.

Megfigyelt mennyiségek: $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, ΔT_{L} (a robbanás és az aktuális pozíció megfigyelése között eltelt földi idő), R (feltesszük, hogy a robbanás távolságát függetlenül megmérték).

Ismeretlen fizikai mennyiségek: v közös sebesség, φ, ill. ΔT_1, ΔT_2 (a robbanástól

az észlelt fényjel kibocsájtásáig eltelt sajátidők).

A robbanástól számított látszólagos távolságok $\Delta L_i = R\Delta\varphi_i$, és innen a látszólagos sebességek

$$v_i = \frac{\Delta L_i}{\Delta T_{\mathrm{L}}}. \tag{10.21}$$

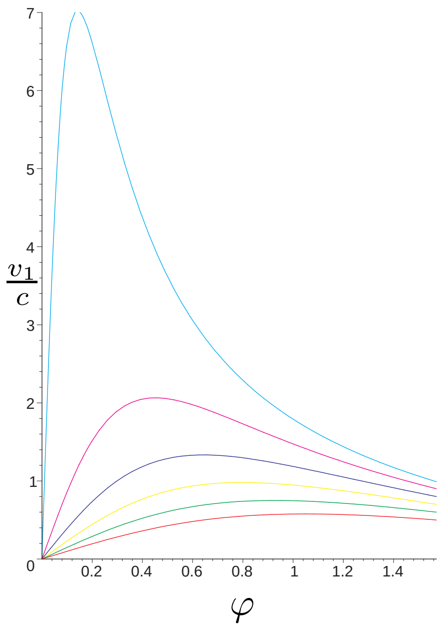
A megfigyelő az egyik sebességet, v_1-et, a c-nél nagyobbnak találja! Az időkülönbségek transzformációja a Doppler-effektus (10.20) formulája alapján

$$\begin{aligned} \Delta T_L &= \mathrm{ch}\beta\Delta T_1 \left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right), \\ &= \mathrm{ch}\beta\Delta T_2 \left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi\right). \end{aligned} \tag{10.22}$$

A látszólagos utak és sebességek

$$\begin{aligned} \Delta L_i &= v\sin\varphi\,\mathrm{ch}\beta\Delta T_i, \\ v_1 &= \frac{\Delta L_1}{\Delta T_L} = \frac{v\sin\varphi}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}, \\ v_2 &= \frac{\Delta L_2}{\Delta T_L} = \frac{v\sin\varphi}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi}. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Innen v, φ kiszámítható. Valóban, v_1 lehet c-nél nagyobb!



22. ábra. A közeledő objektum v_1/c látszólagos sebessége különböző valóságos sebességek ($v/c = 0.5, 0.6, \ldots 0.9, 0.99$) esetén, mint a φ szög függvénye. A maximum helye $\varphi^* = \arccos v/c$, értéke $v_1^{\max} = v/\sqrt{1 - v^2/c^2} = c\,\mathrm{sh}\beta$, ez nagyobb c-nél, ha $v > 1/\sqrt{2}$.

11. Hullámtér

11.1. Komplex hullámvektor

Töltés nélküli térben vizsgáljunk olyan hullámmegoldásokat, melyekben nem feltétlenül valós a hullámszámvektor, $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n}$, ahol $k = \omega/c$, de $\boldsymbol{n}$ lehet komplex. Előre nem alkalmazunk megszorítást $\boldsymbol{n}$-re nézve , pl. nem írjuk elő az $|\boldsymbol{n}| = 1$ normálást, hanem a ME alkalmazásától várunk $\boldsymbol{n}$-re feltételt.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})e^{ik(\boldsymbol{nr}-ct)}, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})e^{ik(\boldsymbol{nr}-ct)}, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}k \\ &\boldsymbol{\nabla E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{ne} = 0, \quad \boldsymbol{\nabla B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{nb} = 0, \end{aligned} \tag{11.1}$$

továbbá a rotációs egyenletekből

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}. \tag{11.2}$$

Innen

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}) = -(\boldsymbol{nn})\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{e} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{nn} = 1. \tag{11.3}$$

Legyen $\boldsymbol{n} = a\boldsymbol{n}_1 + ib\boldsymbol{n}_2$, ahol $\boldsymbol{n}_1$ és $\boldsymbol{n}_2$ valós egységvektorok. Mivel

$$1 = \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} = a^2 - b^2 + 2iab\boldsymbol{n_1}\boldsymbol{n_2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n_1}\boldsymbol{n_2} = 0,\ a^2 - b^2 = 1 \tag{11.4}$$

ezért paraméterezhetjük $\boldsymbol{n}$-et a következő módon

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \mathrm{ch}\vartheta\boldsymbol{n_1} + i\mathrm{sh}\vartheta\boldsymbol{n_2} \\ \vartheta = 0 &: \quad \text{valós } \boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad \text{homogén hullám} \end{aligned} \tag{11.5}$$

Bontsuk fel $\boldsymbol{e}$-t komponensekre, $\boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$,

$$\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{n}_i \varepsilon_i.$$

Kikötések $\boldsymbol{n}$-re: $\boldsymbol{n}\boldsymbol{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \mathrm{ch}\vartheta + i\varepsilon_2 \mathrm{sh}\vartheta = 0$, tehát

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= iA\,\mathrm{sh}\vartheta, \\ \varepsilon_2 &= -A\,\mathrm{ch}\vartheta, \\ \varepsilon_3 &= B, \end{aligned} \tag{11.6}$$

ahol A és B komplex paraméterek. Hasonlóképpen

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{n}_i \chi_i,$$

ahol

$$\begin{aligned} \chi_1 &= iB\,\mathrm{sh}\vartheta, \\ \chi_2 &= -B\,\mathrm{ch}\vartheta, \\ \chi_3 &= -A. \end{aligned} \tag{11.7}$$

A „szokásos” síkhullámot valós $\boldsymbol{n}$ mellett kapjuk, ekkor $\vartheta = 0$. Ha $\vartheta \neq 0$, akkor a hullám $\boldsymbol{n}_1$ irányban oszcillál, $\boldsymbol{n}_2$ irányban exponenciálisan nő vagy csökken. A divergálást csak a határfeltétel állíthatja meg, ha ilyen nem áll útban, akkor a hullám csak valós $\boldsymbol{n}$-et tartalmazhat, s ekkor beszélünk homogén síkhullámról.

11.2. Homogén hullám energiája

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (E^2 + B^2), \tag{11.8}$$

a terek Fourier reprezentációban ($\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n}$)

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\int d^3k \left(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})e^{ik(\boldsymbol{nr}-ct)} + \text{komplex konjugált}\right),$$
$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\int d^3k \left(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})e^{ik(\boldsymbol{nr}-ct)} + \text{komplex konjugált}\right). \tag{11.9}$$

Emlékeztetünk arra hogy

$$\int e^{i\boldsymbol{kr}} d^3r = 8\pi^3\delta(\boldsymbol{k}), \tag{11.10}$$

ezért

$$U_E = \frac{\pi^2}{2}\int d^3k \left(|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})|^2 + \Re(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}(-\boldsymbol{k})e^{-2ikct})\right),$$
$$U_B = \frac{\pi^2}{2}\int d^3k \left(|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})|^2 + \Re(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{b}(-\boldsymbol{k})e^{-2ikct})\right). \tag{11.11}$$

Használjuk ki, hogy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) \\ -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}(-\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{b}(-\boldsymbol{k}) \\ \Rightarrow \quad -\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}(-\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{b}(-\boldsymbol{k}). \end{aligned} \tag{11.12}$$

Innen

$$U = U_E + U_B = \frac{\pi^2}{2}\int d^3k(|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})|^2 + |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})|^2) = \pi^2\int d^3k|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})|^2 = \pi^2\int d^3k|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})|^2. \tag{11.13}$$

Egy módusra jutó energia

$$U = \int u(\boldsymbol{k})d^3k$$
$$u(\boldsymbol{k}) = \frac{\pi^2}{2}(|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})|^2 + |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})|^2) \tag{11.14}$$

Coulomb-mértékben $\phi = 0$, $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$. Ha $\boldsymbol{A}$-t az $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})$ amplitúdóval jellemezzük, akkor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) &= ik\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}) \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) &= i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}) \\ \Rightarrow \quad u(\boldsymbol{k}) &= \pi^2k^2|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})|^2. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Egy módus energiájának elektromos és mágneses járulékai különbözőek, és időben oszcillálnak. Az időfüggő tagok azonban az összegből kiesnek, a módus összenergiája időben állandó – folyamatos energiacsere történik a mágneses és elektromos tér között.

11.3. Impulzus

A hullámtér impulzusát a következő alakba írhatjuk

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3 r. \tag{11.16}$$

Fejtsük ki a vektorszorzatot és használjuk a $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} = 0$ egyenletet

$$\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = E_j\boldsymbol{\nabla}A_j - (\boldsymbol{E}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} = E_j\boldsymbol{\nabla}A_j - \boldsymbol{\nabla}_j(E_j\boldsymbol{A}). \tag{11.17}$$

Innen, a felületi tagot elhagyva, az impulzusra kapjuk

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \frac{1}{4\pi c}\int E_j\boldsymbol{\nabla}A_j\mathrm{d}^3 r\\ &= \frac{1}{4\pi c}\frac{8\pi^3}{2}\int \mathrm{d}^3k\left(\boldsymbol{n}k^2|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})|^2 + \boldsymbol{n}k^2\Re(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{k})e^{-2ikct})\right) = \\ &= \frac{\pi^2}{c}\int \mathrm{d}^3k\,\boldsymbol{n}k^2\,|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})|^2 = \int \mathrm{d}^3k\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{11.18}$$

A második tagban a valós rész páros függvény a $\boldsymbol{k}$-ban, az $\boldsymbol{n}$ faktor viszont páratlan, ezért integráláskor a tag eltűnik. A $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{n}}{c}u(\boldsymbol{k})$ reláció összhangban van azzal, hogy a fény négyes impulzusának hossza nulla.

11.4. Impulzusmomentum

Az impulzusmomentum az impulzussűrűség ismeretében felírható

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}^3 r. \tag{11.19}$$

Fejtsük ki az integrál alatt álló kifejezést felhasználva, hogy $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$, majd alakítsuk teljes divergenciává a második tagot, végül használjuk ki, hogy $\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_j$ és $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} = 0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} \quad\times\quad &(\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})) = \boldsymbol{r}\times(E_j\boldsymbol{\nabla}A_j - (E_j\boldsymbol{\nabla}_j)\boldsymbol{A})\\ =\quad & E_j\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla}A_j - \boldsymbol{\nabla}_j(E_j\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}) + E_j(\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{\nabla}_jE_j)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}\\ =\quad & E_j\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla}A_j - \boldsymbol{\nabla}_j(E_j\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}.\end{aligned} \tag{11.20}$$

A felületi tagot elhagyva az impulzusmomentumot két tag összegeként kapjuk

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\text{pálya}} + \boldsymbol{L}_{\text{spin}}, \tag{11.21}$$

ahol

$$\boldsymbol{L}_{\text{pálya}} = \frac{1}{4\pi c}\int \mathrm{d}^3 r\, E_j\, \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla} A_j,$$
$$\boldsymbol{L}_{\text{spin}} = \frac{1}{4\pi c}\int \mathrm{d}^3 r\, \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A} = \frac{\pi^2}{c}\int\; ik\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}. \tag{11.22}$$

Itt kihasználtuk, hogy $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{k})$ páratlan függvény, ezért az integráláskor kiesik. A második tag expliciten nem tartalmazza a helyvektort, ezt tekintjük a saját impulzusmomentumnak, azaz spinnek.

Válasszuk a Coulomb mértéket, $\boldsymbol{ka} = 0$, és vezessünk be két $\boldsymbol{n}$-re merőleges $\boldsymbol{t}_1$, és $\boldsymbol{t}_2$ vektort úgy, hogy $\boldsymbol{t}_1\times\boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{n}$. Diagonalizáljuk a vektorszorzatot $\boldsymbol{L}_{\text{spin}}$-ben! Bevezethetünk két komplex vektort a következő módon

$$\boldsymbol{t}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{t}_1 \pm i\boldsymbol{t}_2) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{t}_+\times\boldsymbol{t}_- = -i\boldsymbol{n}. \tag{11.23}$$

Az $\boldsymbol{a}$ vektor ekkor a következő alakba írható

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{t}_1 + a_2\boldsymbol{t}_2 = a_+\boldsymbol{t}_+ + a_-\boldsymbol{t}_-, \tag{11.24}$$

ahonnan

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^* = (a_+\boldsymbol{t}_+ + a_-\boldsymbol{t}_-)\times(a_+\boldsymbol{t}_+ + a_-\boldsymbol{t}_-)^* =$$
$$= -i(|a_+|^2 - |a_-|^2)\boldsymbol{n}. \tag{11.25}$$

Az impulzusmomentum spin járuléka tehát

$$\boldsymbol{L}_{\text{spin}} = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{l}_{\text{spin}},$$
$$\boldsymbol{l}_{\text{spin}} = \frac{\pi^2}{c}\boldsymbol{k}(|a_+|^2 - |a_-|^2). \tag{11.26}$$

11.1. Házi feladat. *a) Mutassuk meg, hogy a hullámcsomag tömegközéppontja*

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{8\pi U}\int \boldsymbol{r}(E^2 + B^2)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \langle\boldsymbol{r}\rangle. \tag{11.27}$$

egyenletes $\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{P}/U$ sebességgel halad. b) Hogyan folyik szét a hullámcsomag, azaz $\langle|\boldsymbol{r}|^2\rangle - |\langle\boldsymbol{r}\rangle|^2 = \Delta(t) =?$ (10-10%).

12. Töltések tere

12.1. Inhomogén hullámegyenlet

A hullámegyenlet Lorenz-mértékben

$$\Box A^i = \partial_j \partial^j A^i = \frac{4\pi}{c} j^i.$$

Labor rendszerben

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = 4\pi\varrho \tag{12.1}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{12.2}$$

12.2. A Green függvény módszere

A Green függvény (GF) definíciója

$$\Box G(\boldsymbol{r}, t) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})\delta(t - t') \tag{12.3}$$

ahol $\boldsymbol{r'}, t'$ paraméterek. Hajtsunk végre Fourier transzformációt az időben

$$G_\omega(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}t e^{i\omega t} G(\boldsymbol{r}, t) \tag{12.4}$$

és legyen $k = \frac{\omega}{c}$. Ekkor a (12.3) új alakja

$$\Delta G_\omega + k^2 G_\omega = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})e^{i\omega t'}, \tag{12.5}$$

azaz a fázisfaktortól eltekintve a G_ω a Helmholtz egyenlet GF-e. Bevezetve az $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}$ vektort a (12.5) radiális alakja

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2} R G_\omega + k^2 G_\omega = -4\pi\delta(\boldsymbol{R})e^{i\omega t'}. \tag{12.6}$$

Ennek megoldása $R > 0$ mellett

$$G_\omega = \frac{1}{R}(A_\omega^+ e^{ikR} + A_\omega^- e^{-ikR}) = \frac{1}{R}\sum_{\sigma=\pm1} A_\omega^\sigma e^{ik\sigma R}. \tag{12.7}$$

Integráljuk a (12.5) egyenletet egy $\varepsilon \to 0$ sugarú gömbre (a k^2-tel arányos tag eltűnik)

$$\int_{R<\varepsilon} \mathrm{d}^3 r \Delta G_\omega \approx \int_{R<\varepsilon} \Delta\left(\frac{1}{R}\right) \sum_{\sigma=\pm1} A_\omega^\sigma e^{ik\sigma R} = -4\pi \sum_{\sigma=\pm1} A_\omega^\sigma = -4\pi e^{i\omega t'}. \tag{12.8}$$

Az A^σ_ω-ra ezért írhatjuk

$$A^\sigma_\omega = a^\sigma e^{i\omega t'} + \sigma b_\omega e^{i\omega t'}, \tag{12.9}$$

ahol

$$\sum_\sigma a^\sigma = 1. \tag{12.10}$$

Innen a GF

$$\begin{aligned} G(R,t) &= \frac{1}{R}\sum_\sigma \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} A^\sigma_\omega e^{i\sigma kR} \\ &= \frac{1}{R}\sum_\sigma \left[a^\sigma \delta\left(t - t' - \sigma\frac{R}{c}\right) + \sigma b\left(t - t' - \sigma\frac{R}{c}\right)\right]. \end{aligned} \tag{12.11}$$

A GF-ben lévő b_ω ill. $b(t)$ határozatlan, a határfeltételek kielégítésére fordítható. Ha a végtelenben lecsengő megoldást keresünk s más határon nem kell illesztenünk, akkor a homogén egyenletet kielégítő $b()$-t tartalmazó tag elhagyható, ezért

$$G = \sum_\sigma a^\sigma G^\sigma, \tag{12.12}$$

ahol

$$G^\pm(R, t-t') = \frac{\delta(t - t' \mp \frac{R}{c})}{R}. \tag{12.13}$$

Ha $t > t'$, akkor $G^- = 0$, ha $t' > t$, akkor $G^+ = 0$. A G^+ a retardált, a G^- az avanzsált GF.

12.3. A sugárzási tér GF segítségével

Inhomogén hullámegyenlet

$$\Box\psi = 4\pi f(\boldsymbol{r}, t) \tag{12.14}$$

időben korlátozott forrással: $f(\boldsymbol{r}, t) = 0$ a $[t_1, t_2]$ intervallumon kívül.

- Ha $t < t_1$ esetén ismert $\psi_0(\boldsymbol{r}, t)$, akkor

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi_0(\boldsymbol{r}, t) + \int \mathrm{d}^3r' \int \mathrm{d}t'\, G^+(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}, t - t') f(\boldsymbol{r'}, t'), \tag{12.15}$$

  a második tag eltűnik $t < t_1$ mellett.

- Ha $t > t_2$ esetén ismert $\psi_0(\boldsymbol{r}, t)$, akkor

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi_0(\boldsymbol{r}, t) + \int \mathrm{d}^3 r' \int \mathrm{d}t'\, G^-(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}, t - t') f(\boldsymbol{r'}, t'), \tag{12.16}$$

  a második tag eltűnik $t > t_2$ mellett.

A második esetben az avanzsált GF lép fel, nem mondhatjuk tehát azt, hogy a kauzalitás miatt egyedül a retardált GF a fizikai. Az, hogy melyik GF használandó, attól függ, milyen időkben ismerjük a megoldást.

Ha a tér zérus volt a forrás megjelenése előtt, akkor a retardált GF-t alkalmazzuk. Ilyenkor a — végtelenben lecsengő — potenciálok a retardált GF-nyel

$$\begin{aligned} G^+(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}, t - t') &= \frac{\delta(t - t' - \frac{R}{c})}{R}, \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r'} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'}, t - \frac{R}{c})}{R}, \\ \phi(\boldsymbol{r}, t) &= \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r'} \frac{\varrho(\boldsymbol{r'}, t - \frac{R}{c})}{R}. \end{aligned} \tag{12.17}$$

E térre mondhatjuk, hogy a forrás keltette, ezért elterjedtebb a retardált GF.

12.4. Ponttöltés tere: Liénard–Wiechert potenciálok

Ponttöltés esetén a töltéssűrűség illetve az áramsűrűség ($\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}_0(t)$):

$$\varrho(\boldsymbol{r}, t) = e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)), \qquad \boldsymbol{j}(t) = e\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)). \tag{12.18}$$

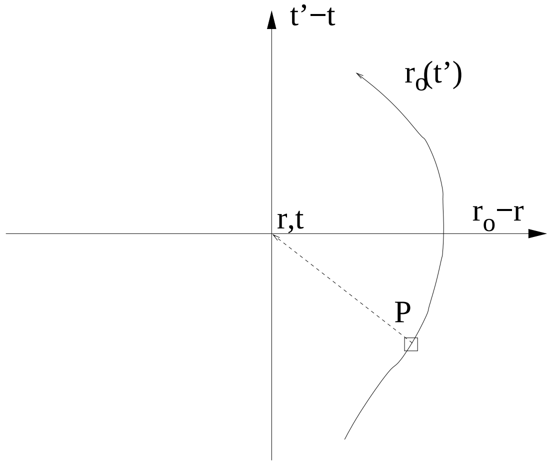
Felhasználva a retardált GF-t, a skalárpotenciál

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{r}, t) &= e \int \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}{c}\right) \delta(\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r}_0(t'))}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \mathrm{d}^3 r' \mathrm{d}t' \\ &= e \int \mathrm{d}t' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t')|}{c})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t')|} \end{aligned} \tag{12.19}$$

Megoldandó t'-re

$$c(t - t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t')|, \tag{12.20}$$

mivel $|\boldsymbol{v}(t)| < c$, azért t' egyértelmű. A t' az az időpont, amelyben emittált fényjel az $\boldsymbol{r}$-be a t időpontban érkezik.



23. ábra. Ponttöltés pályája a téridőben (folytonos vonal). A P ponthoz tartozó t' a keresett egyértelmű megoldás. A P-ben emittált fényjel az $\boldsymbol{r}$-et t-ben éri el.

Szükségünk lesz $\delta(x)$ következő tulajdonságára:

$$\delta(f(x))|\mathrm{d}f| = \sum_{f(x_i)=0} \delta(x - x_i)|\mathrm{d}x| \quad \Rightarrow \quad \delta(f(x)) = \sum_{f(x_i)=0} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \tag{12.21}$$

Most egy x_i gyök van. Helyettesítések:

$$\begin{aligned} & t' \to x \\ & t' - t + \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t')|}{c} \to f(x) \\ & 1 + \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{v}(t')(\boldsymbol{r}_0(t') - \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t')|} = 1 - \frac{\boldsymbol{v}(t')\boldsymbol{R}(t')}{c\,R(t')} \to f'(x) = |f'(x)|. \end{aligned} \tag{12.22}$$

Itt bevezettük

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t), \tag{12.23}$$

$t' = t'(\boldsymbol{r}, t)$ a (12.20) megoldása, és $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}_0$. Legyen

$$L(t) = R(t') - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(t')\boldsymbol{R}(t'), \tag{12.24}$$

ezzel a (12.21,12.22) egyenletekből kapjuk a potenciált

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e}{L}, \tag{12.25}$$

s hasonlóan a vektorpotenciálra a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t')$ jelöléssel

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e\boldsymbol{v}}{cL}. \tag{12.26}$$

12.5. LW terek

Segédszámítások

i) $\partial_t t' = ?$

$$
\begin{aligned}
c(t-t') &= R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t')|, \\
c(1-\partial_t t') &= -\frac{\boldsymbol{vR}}{R}\partial_t t', \\
\Rightarrow \quad \partial_t t' &= \frac{R}{R - \frac{\boldsymbol{vR}}{c}} = \frac{R}{L}.
\end{aligned} \tag{12.27}
$$

ii) $\boldsymbol{\nabla} t' = ?$

$$
-c\boldsymbol{\nabla} t' = \frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{vR}}{R}\boldsymbol{\nabla} t' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} t' = -\frac{\boldsymbol{R}}{cL} \tag{12.28}
$$

iii) $\partial_{t'} L = ?$

$$
\partial_{t'} L = -\frac{\boldsymbol{Rv}}{R} - \frac{1}{c}\boldsymbol{aR} + \frac{1}{c}v^2, \quad \text{ahol } \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}(t'). \tag{12.29}
$$

Jelölés

$$
\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}R}{c} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{KR} = LR
$$

iv) $\boldsymbol{\nabla} L = ?$

$$
\boldsymbol{\nabla} L = \frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} + \partial_{t'} L \, \boldsymbol{\nabla} t' = \frac{\boldsymbol{K}}{R} - \frac{\boldsymbol{R}}{cL}\partial_{t'} L \tag{12.30}
$$

v) $\partial_t \boldsymbol{v} = ?$

$$
\partial_t \boldsymbol{v} = \partial_{t'} \boldsymbol{v} \, \partial_t t' = \boldsymbol{a}\frac{R}{L}
$$

vi) $\partial_t L = ?$

$$
\partial_t L = \frac{R}{L}\partial_{t'} L
$$

A potenciálok

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\phi &= \boldsymbol{\nabla}\frac{e}{L} = -e\frac{\boldsymbol{\nabla} L}{L^2} \\
\frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{A} &= \frac{e}{c^2}\partial_t \frac{\boldsymbol{v}}{L} = \frac{e}{c^2}\left(\frac{\partial_t \boldsymbol{v}}{L} - \boldsymbol{v}\frac{\partial_t L}{L^2}\right)
\end{aligned} \tag{12.31}
$$

Az elektromos tér az eddigi eredmények felhasználásával

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\phi \\ &= e\left\{\frac{\boldsymbol{K}}{RL^2} + \frac{\boldsymbol{K}}{cL^3}\left(\frac{\boldsymbol{Rv}}{R} + \frac{\boldsymbol{aR}}{c} - \frac{v^2}{c}\right) - \frac{\boldsymbol{a}R}{c^2L^2}\right\}.\end{aligned} \tag{12.32}$$

Mivel

$$L + \frac{\boldsymbol{Rv}}{c} = R \tag{12.33}$$

azért

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= e\left\{\frac{\boldsymbol{K}}{L^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\boldsymbol{K}}{c^2L^3}(\boldsymbol{aR}) - \frac{\boldsymbol{a}R}{c^2L^2}\right\} \\ &= e\frac{\boldsymbol{K}}{L^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{e}{c^2L^3}\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{a})\end{aligned} \tag{12.34}$$

12.1. Házi feladat. *Mutassuk meg*

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} = \frac{e}{c}\frac{\boldsymbol{v}}{L}$$

alapján, hogy

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}\times\boldsymbol{E}$$

(20%)

12.6. Kovariánsan

A GF kovariáns alakban

$$\frac{1}{c}G^{\pm}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}, t-t') = G^{\pm}(x^i - {x'}^i) = 2\theta(\pm(x^0 - {x'}^0))\delta((x-x')^2), \tag{12.35}$$

mert

$$(x-x')^2 = c^2|t-t'|^2 - \underbrace{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}_{R^2}, \tag{12.36}$$

$$\delta((x-x')^2) = \frac{1}{2R}(\delta(c(t-t')-R) + \delta(c(t-t')+R)), \tag{12.37}$$

és a lépcső függvény ezek egyikét választja ki. Noha a θ függvény nem kovariáns, a δ-val szorozva az, mert csak azt jelöli ki, hogy az x-hez tartozó fénykúp melyik oldalán fekszik az x'.

Kovariáns tárgyalásban a ponttöltés pályája $x_0^i(\tau)$ A négyes vektorpotenciál és az áram retardált GF-nyel

$$\begin{aligned} A^i(x) &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x' G^+(x-x')j^i(x') \\ j^i(x) &= ec\int u^i(\tau)\delta^{(4)}(x-x_0(\tau))\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{12.38}$$

A j^i nulladik komponense valóban a töltéssűrűség ($u^0 = c\gamma$, $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t'/\gamma$)

$$j^0 = ec\int c\gamma\frac{\mathrm{d}t'}{\gamma}\delta(ct-ct')\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t')) = ce\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)) = c\varrho(\boldsymbol{r},t). \tag{12.39}$$

Helyettesítsük be A^i-be j^i-t és a GF-t:

$$\begin{aligned} A^i(x) =& \frac{1}{c}\int ecu^i(\tau)\delta^4(x'-x_0(\tau))2\theta(x^0-x'^0)\delta((x-x')^2)\mathrm{d}^4x'\mathrm{d}\tau \\ =& 2e\int \mathrm{d}\tau u^i(\tau)\theta(x^0-x_0^0(\tau))\delta((x-x_0(\tau))^2) \\ =& \frac{eu^i(\tau_0)}{u_j(\tau_0)(x^j-x_0^j(\tau_0))}, \end{aligned} \tag{12.40}$$

ahol a τ_0 időpontban

$$|x-x_0(\tau_0)| = 0 \quad \Rightarrow \quad c(t-t_0(\tau_0)) = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(\tau_0)|, \tag{12.41}$$

ezt a gyököt választotta ki a θ lépcsőfüggvény. Például a skalárpotenciál

$$\phi = A^0 = \frac{ec\gamma}{c\gamma(ct-ct_0)-\gamma\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} = \frac{e}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} = \frac{e}{L},$$

ugyanaz mint a nemkovariánsan (labor rendszerben) kapott eredmény.

12.2. Házi feladat. *Határozzuk meg a ponttöltés által keltett F^{ij} kovariáns alakját! (A pálya τ szerinti deriváltját tartsuk meg kijelölve.) (20%)*

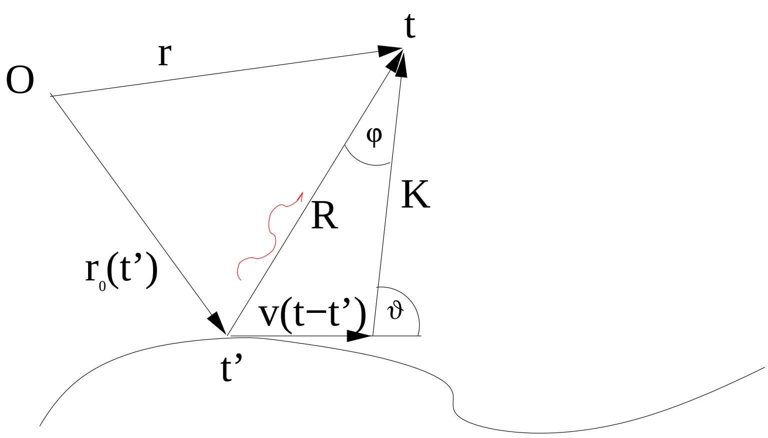
12.7. Az LW terekről

i) Kis sebességekre:

$$
\begin{aligned}
& t \approx t', \quad \boldsymbol{K} \approx \boldsymbol{R} \approx \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t), \quad L \approx R \\
& \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{K} \approx -\frac{R}{c} \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v} \\
& \boldsymbol{E} \approx e \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \quad \text{Coulomb törvény} \\
& \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{R}}{R} \times \boldsymbol{E} \approx \frac{e}{c} \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{R}}{\boldsymbol{R}^3} \quad \text{Biot-Savart törvény}
\end{aligned}
\tag{12.42}
$$

ii) K és L jelentése

Részecske pozíciója az emisszió pillanatában: $\boldsymbol{r}_0(t')$; megfigyelő: $\boldsymbol{r}$; $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t')$; $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t') - \boldsymbol{v}(t')(t - t')$: megfigyelőhöz abból a pontból mutat, ahol a részecske lenne ha egyenletesen mozogna. A $\boldsymbol{K}$ és $\boldsymbol{R}$ által bezárt szög φ, a $\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{K}$-é pedig ϑ.



24. ábra. A $\boldsymbol{K}$ ábrázolása. Mivel $R = c(t - t')$, ezért $c|\sin\varphi| = v|\sin\vartheta|$.

Ekkor

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{K} = \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}R}{c} \\
& L = \frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}}{R} = K\cos\varphi = K\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\vartheta} \\
& \text{mert} \qquad |\sin\varphi| = |\frac{v}{c}\sin\vartheta|
\end{aligned}
\tag{12.43}
$$

iii) Egyenletesen mozgó töltés

$$\text{legyen: } \boldsymbol{v} = (v, 0, 0) \quad \text{és} \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} R = \boldsymbol{R}_t \tag{12.44}$$

a) Lorentz transzformáció relativitáselmélet nélkül

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_t &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t) \to R_t^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2 \\ \sin^2 \vartheta &= \frac{y^2 + z^2}{R_t^2} \end{aligned} \tag{12.45}$$

$$\begin{aligned} &L^2 = R_t^2 (1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta) = (x - vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2 + z^2) \\ &\text{a potenciál: } \phi = \frac{e}{L}, \quad \text{jelölés: } \phi_0 = \frac{e}{r} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &\phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \phi_0 \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y, z \right) \end{aligned} \tag{12.46}$$

Ez éppen a skalárpotenciál Lorentz transzformációja, mert a vektorpotenciál az együtt-mozgó IR-ben zérus! A vektorpotenciál Lorentz-transzformációját hasonló eljárással

kaphatjuk.

b) Tér $\boldsymbol{a} = 0$ esetén

$$\boldsymbol{E} = e \frac{\boldsymbol{K}}{L^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = e \frac{\boldsymbol{R}_t \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{R_t^3 (1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \tag{12.47}$$

A korábban LT-val kapott tér! Most sugárzási hátterét is értjük: A különböző helyekre különböző korábbi időpontból érkeznek a jelek, s ezek „konspirálnak" a merőleges síkba sűrűsödő erővonalrendszerré.

13. Ponttöltés sugárzása

13.1. Kisugárzott teljesítmény

i) Energiaáram

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{c}{4\pi R} (\boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{E})) = \frac{c}{4\pi R} (\boldsymbol{R} E^2 - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{E})). \tag{13.1}$$

Nagy R esetén $\boldsymbol{E}$ formulájának első tagja gyorsabban cseng le, mint a második tag, és mivel az utóbbi merőleges $\boldsymbol{R}$-re, azért

$$\boldsymbol{S} \approx \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{n}_R E^2 \approx \frac{e^2}{4\pi L^6 c^3}\boldsymbol{n}_R(\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{a}))^2, \tag{13.2}$$

amelyből kis $\boldsymbol{v}$ mellett

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} =& \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}R}{c} \approx \boldsymbol{R}, \quad L = R - \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{R}}{c} \approx R \\ \boldsymbol{S} =& \frac{\boldsymbol{n}_R e^2}{4\pi R^6 c^3} R^4 a^2 \sin^2\vartheta = \frac{\boldsymbol{n}_R}{4\pi}\frac{e^2 a^2}{c^3 R^2}\sin^2\vartheta, \end{aligned} \tag{13.3}$$

ahol ϑ az $\boldsymbol{a}$ és az $\boldsymbol{R}$ által bezárt szög. A kisugárzott teljesítmény ($\int \mathrm{d}\Omega \sin^2\vartheta = 8\pi/3$)

$$P = \oint \boldsymbol{S}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{2e^2}{3c^3}a^2.$$

Nagy $\boldsymbol{v}$-kre milyen formula érvényes? A fenti eredményt a töltés $\mathcal{K}_0$ pillanatnyi együtt-

mozgó IR-jében értjük, s kovariánsan kiterjesztjük. Felidézzük

$$u^i = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \quad w^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \mathcal{K}_0\text{-ban: } w^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}, \tag{13.4}$$

s a $w^i w_i \to a^2$ behelyettesítéssel élünk.

$$P = -\frac{2e^2}{3c^3}w^i w_i.$$

Írjuk ki komponensekben, labor rendszerből

$$\begin{aligned} w^0 &= c\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau} = \gamma^3\frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{v}}{c} = \gamma^4\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}}{c} \\ w^\alpha &= \frac{\mathrm{d}\gamma\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\tau} = \boldsymbol{v}\frac{\gamma^4\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}}{c^2} + \gamma^2\boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{13.5}$$

Ezekből négyzetre emelés és átrendezés után:

$$
\begin{aligned}
&-w^i w_i = \gamma^4 a^2 + \frac{\gamma^6}{c^2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2 = \gamma^6(a^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v})^2) \\
&\text{Végül: } P = \frac{2e^2}{3c^3}\gamma^6(a^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v})^2) \qquad \text{(Liénard 1898)}
\end{aligned}
\tag{13.6}
$$

ii) Sugárzás gyorsítókban

(a) Lineáris gyorsítók ($\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{v}$):

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v\gamma}{\mathrm{d}t} = a\gamma + \frac{v^2}{c^2}\gamma^3 a = a\gamma^3 \\
&P = \frac{2e^2}{3c^3}a^2\gamma^6 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{1}{m^2}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)^2
\end{aligned}
\tag{13.7}
$$

A betáplált $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$ és a kisugárzott P teljesímény

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \\
&\frac{P}{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{1}{m^2 v}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \underset{v\approx c}{=} \frac{2}{3}\left(\frac{e}{mc^2}\right)^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
\tag{13.8}
$$

konkrét becslés:

$$
\left(\frac{mc^2}{e}\right)^2 = 2\cdot 10^{14}\frac{MeV}{m} \quad \text{tipikusan: } \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \sim 10\frac{MeV}{m}, \tag{13.9}
$$

tehát a sugárzási veszteség elhanyagolható.

(b) Szinkrotron (közelítőleg $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{v}$):

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2\gamma^4 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{v^4\gamma^4}{\varrho^2}, \tag{13.10}$$

ahol ϱ a körpálya sugara. Ha $v \approx c$ és a betáplált teljes energia $U \approx mc^2\gamma$, akkor

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi\varrho}{v}, \quad PT = \Delta U = \frac{2\pi}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{v^3\gamma^4}{\varrho} \approx \frac{4\pi e^2 U^4}{3m^4c^8\varrho} \\ \Delta U[\mathrm{MeV}] &= 0,0885\frac{U^4[\mathrm{GeV}]}{\varrho[m]} \\ \varrho &= 100\mathrm{m}, \quad U = 10\mathrm{GeV} \Rightarrow \Delta U = 8,85\mathrm{MeV}, \end{aligned} \tag{13.11}$$

a veszteség jelentős.

iii) Szögeloszlás

A $T_1 < t' < T_2$ időintervallumban kisugárzott, felületegységre eső energia (t' a részecske sugárzásának ideje laboridőben mérve)

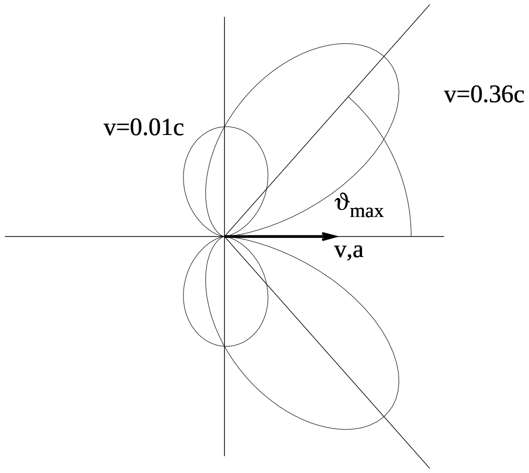
$$\int \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}_R \mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}_R \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}}_{\uparrow \frac{L}{R}} \mathrm{d}t'.$$

Felhasználva, hogy $c(t-t') = R(t')$ nyerjük $\mathrm{d}t/\mathrm{d}t' = L/R = 1 - \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}_R}{c}$, ahonnan az egységnyi térszögbe eső sugárzási teljesítmény (13.2) alapján

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = R^2(\boldsymbol{S}\boldsymbol{n}_R)\frac{L}{R} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{\left|\boldsymbol{n}_R \times \left[\left(\boldsymbol{n}_R - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) \times \boldsymbol{a}\right]\right|^2}{\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}_R}{c}\right)^5}.$$

- lineáris gyorsító $\boldsymbol{a} \| \boldsymbol{v}$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}a^2\frac{\sin^2\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^5} \tag{13.12}$$



25. ábra. Lineáris gyorsítóban a sugárzás intenzitásának szögeloszlása kis és nagy sebességek mellett. Ultrarelativisztikus limeszben $\vartheta_{\max} \approx 1/2\gamma$.

A $v \to c$ ultrarelativisztikus (UR) közelítésben, feltéve, hogy kis ϑ-ra koncentrálódik

a sugárzás, a nevező

$$1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\vartheta^2 \approx \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\vartheta^2.$$

Végül

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = F(\gamma\vartheta), \qquad \text{ahol,} \qquad F(y) = 8\frac{e^2a^2}{\pi c^3}\gamma^8\frac{y^2}{(1+y^2)^5} \tag{13.13}$$

Ha a szögeloszlást normáljuk, akkor azzal átlagot képezhetünk

$$\sqrt{\langle\vartheta^2\rangle} = \frac{1}{\gamma}.$$

Azaz a sugárzás gyakorlatilag $\Delta\vartheta = \frac{1}{\gamma}$ szögben tart szét, ezért valóban jogos volt a kis ϑ sorfejtés.

- szinkrotron $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{v}$

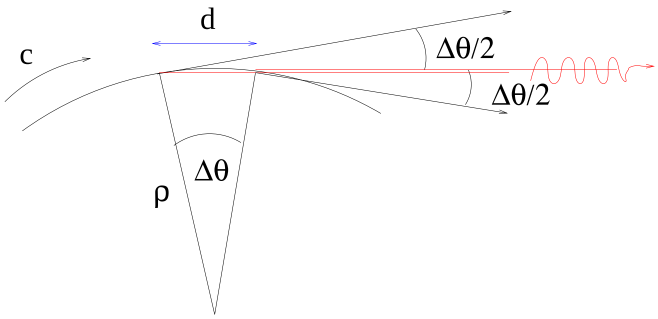
  Legyen ϑ az $\boldsymbol{R}$ és $\boldsymbol{v}$ közötti szög (korábban ϑ az $\boldsymbol{R}$ és az $\boldsymbol{a}$ közöttit jelölte).

  Az UR esetet vizsgáljuk, $v \to c$. Ekkor szintén skálázódik a szögeloszlás, azaz $\gamma\vartheta = y$-tól függ, a lineáris gyorsítóétól azonban eltérő $F(y)$ sűrűségfüggvényt kapunk. Itt is $\sqrt{\langle\vartheta^2\rangle} = \frac{1}{\gamma}$.

13.1. Házi feladat. *Határozzuk meg az $F(y)$-t szinkrotronra az UR limeszben.*

(30%)

Mennyi ideig észleljük a sugárzást, ha adott irányból figyeljük, UR részecske esetén?



26. ábra. A szinkrotron sugárzás észlelése.

A pálya sugara legyen ϱ. Adott irányú sebesség esetén a sugárzás a $\Delta\vartheta \approx \frac{1}{\gamma}$ nyílásszögű kúpon belül észlelhető, ezért az észlelt jel kibocsájtásának kezdetétől a végéig a részecske éppen ekkora szögben fordul el a körpályán. Ezalatt $d \approx \varrho\Delta\vartheta = \frac{\varrho}{\gamma}$ távolságot tesz meg. A kisugárzási idő és a jelhossz

$$\Delta t = \frac{d}{v}, \qquad \lambda = \frac{cd}{v} - d = d\left(\frac{c}{v} - 1\right) \approx \frac{d}{2\gamma^2} \approx \frac{\varrho}{2\gamma^3}. \tag{13.14}$$

Az ehhez tartozó karakterisztikus frekvencia

$$\omega = \frac{c}{\lambda} = \frac{2c}{\varrho}\gamma^3 \approx 2\omega_0\gamma^3, \tag{13.15}$$

azaz az $\omega_0 = \frac{c}{\varrho}$ Larmor frekvencia γ^3-szöröse is megjelenik a spektrumban. Pl. $\gamma = 2 \cdot 10^4$ és $\omega_0 = 3 \cdot 10^6 s^{-1}$ esetén $\omega \approx 2.4 \cdot 10^{19} s^{-1}$ ami körülbelül 16keV-es röntgen sugárzásnak felel meg.

13.2. Sugárzási visszahatás

Kis sebességekre láttuk

$$P = \frac{2e^2}{3c^3}a^2. \tag{13.16}$$

Milyen erőhatásnak felel meg az energiaveszteség? Integráljuk az impulzus változását egy trajektória mentén:

$$\int m\dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int m\dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \frac{mv^2}{2}\bigg|_{t_1}^{t_2} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2} a^2\mathrm{d}t \tag{13.17}$$

Fejtsük ki a második integrált:

$$\int a^2 \mathrm{d}t = \int \boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}t = \boldsymbol{a}\boldsymbol{v}|_{t_1}^{t_2} - \int \boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{a}} \mathrm{d}t = \boldsymbol{a}\boldsymbol{v}|_{t_1}^{t_2} - \int \dot{\boldsymbol{a}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{13.18}$$

Periodikus mozgásnál $t_2 = t_1 + T$ és az első tag eltűnik

$$\left.\frac{mv^2}{2}\right|_{t_1}^{t_1+T} = \int \boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{2e^2}{3c^3} \int \dot{\boldsymbol{a}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{13.19}$$

A fentiek teljesülnek, ha

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\boldsymbol{a}}, \tag{13.20}$$

ez a sugárzasi visszahatás nemrelativisztikus egyenlete.

13.2. Házi feladat. *Mutassuk meg, hogy nemperiodikusan mozgó, egyenletesen töltött, kicsi r_0 sugarú gömbbel modellezett részecske sugárzási visszahatása*

$$\left(m + \frac{2e^2}{3c^2} \int \frac{\mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}^3 r'}{2|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right) \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\boldsymbol{a}} + \mathcal{O}(r_0). \tag{13.21}$$

(45%)

13.3. Természetes vonalszélesség

Tekintsük a molekulában kötött elektront oszcillátornak (Lorentz gondolatmenete)

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \alpha \dddot{x}, \qquad \alpha = \frac{2e^2}{3mc^3} \ll \frac{1}{\omega_0}, \tag{13.22}$$

s keressük a megoldást az $x = x_0 e^{i\omega t}$ alakban

$$\omega^2 \quad = \quad \omega_0^2 + i\alpha\omega^3 \quad \Rightarrow \quad \omega \approx \omega_0 + i\frac{\alpha}{2}\omega_0^2 = \omega_0 + i\gamma. \tag{13.23}$$

Innen a $t = 0$-ban az x_0-ba kitérített, majd elengedett elektronra

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 e^{i\omega_0 t - \gamma t} \quad &\Rightarrow \quad x_\omega = x_0 \int_0^\infty e^{-i\omega t + i\omega_0 t - \gamma t} \mathrm{d}t = \frac{x_0}{i(\omega - \omega_0) + \gamma} \\ \Rightarrow \quad |x_\omega|^2 &= \frac{x_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \end{aligned} \tag{13.24}$$

Numerikusan $\alpha \approx 10^{-24}$s, látható fényre pl. $\lambda_0 = 0.5\mu$m, $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \approx 4 \cdot 10^{15}\mathrm{s}^{-1}$, $\gamma = \frac{\alpha\omega_0^2}{2} = 0,7 \cdot 10^7 \mathrm{s}^{-1}$, koherenciaidő $\tau = \frac{1}{\gamma} = 1,4 \cdot 10^{-7} s$, hossz $l = c\tau = 42$m.

13.4. Öngyorsítás

Állandó térben az effektív mozgásegyenlet általános megoldása

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m} + \alpha \dddot{x} \qquad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 + x_1 e^{t/\alpha}. \tag{13.25}$$

Az utolsó tag divergál, ilyet nem figyeltek meg, ezért a valóságban $x_1 = 0$. NB: Az effektív egyenlet csak kis sebességekre áll fenn.

13.5. Dirac-féle mozgásegyenlet

Állítsuk elő a visszahatás effektív mozgásegyenletét kovariánsan. Induljunk ki az

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = w^i = \frac{1}{m}F^i + \alpha\left(\frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}\tau} + \Delta^i\right) \tag{13.26}$$

alakból, ahol F^i a külső erőket reprezentáló négyeserő, és az α-val szorzott tag a sugárzási visszahatás. Az ismeretlen Δ^i-t határozzuk meg. A nemrelativisztikus egyenletet akkor kapjuk vissza, ha kis sebességekre a Δ^a tér-komponensek eltűnnek. A nulladik

komponenst is meghatározhatjuk. Mint már láttuk

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} = c\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau} = \gamma^4\frac{\boldsymbol{av}}{c} = w^0, \tag{13.27}$$

ez eltűnik, ha $v \to 0$, a nemrelativisztikus limeszben a mozgásegyenlet 0. komponense tehát zérus. Mivel

$$\frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}\tau} \approx \frac{a^2}{c}, \tag{13.28}$$

ezt zérussá a $\Delta^0 \approx -\frac{a^2}{c}$ kompenzálja. A feltételeinket tehát kis v-re teljesíti $\Delta^i \approx -\frac{a^2}{c^2}u^i$. Relativisztikus sebességekre ezt (13.4) alapján kovariánsan a

$$\Delta^i = w^j w_j \frac{u^i}{c^2}$$

alakban terjeszthetjük ki. Ilymódon kapjuk a Dirac-féle mozgásegyenletet

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{m}F^i + \alpha\left(\frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}\tau} + u^i\frac{w^j w_j}{c^2}\right). \tag{13.29}$$

13.3. Házi feladat. *Írjuk fel a Dirac mozgásegyenletet labor rendszerben! Milyen alakot kapunk az $\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{v}\|\dot{\boldsymbol{a}}\|\boldsymbol{F}$ speciális esetben? (25%)*

Kimutatható, hogy a Dirac mozgásegyenletnek is van öngyorsító megoldása. Ezzel elértük a klasszikus fizika határait.

13.6. Cserenkov sugárzás

Közegben gyorsan haladó töltés jellegzetes szögben sugároz akkor is, ha nincs gyorsulása. A hullámegyenlet labor rendszerben pontszerű forrással

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{n^2}{c^2}\partial_t^2 \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\varrho \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} = (0, 0, v), \tag{13.30}$$

ahol

$$\varrho = -e\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt).$$

Vizsgáljuk a z komponenst

$$A_z(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega e^{i\omega t} A^\omega(\boldsymbol{r}). \tag{13.31}$$

Az $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jelöléssel (13.30) alakja

$$\Delta A^\omega + \frac{n^2\omega^2}{c^2} A^\omega = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\delta(x)\delta(y)}_{\frac{\delta(r)}{2\pi r}} e^{-\frac{i\omega z}{v}}. \tag{13.32}$$

Ez a Bessel-féle differenciálegyenlet, ha $r > 0$. Nagy távolságokra

$$A^\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}} e^{-\frac{i\omega z}{v}},$$

ahol az amplitúdó eleget tesz az

$$u''(r) + s^2 u(r) = 0, \qquad s^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2} \tag{13.33}$$

egyenletnek. Megoldása

$$u(r) = u_0 e^{\pm isr}, \tag{13.34}$$

a radiális hullám lecseng (a divergens megoldás nemfizikai), ha $\frac{c}{n} > v$, és oszillál, ha $\frac{c}{n} < v$. Innen

$$A_z(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega \frac{u_\omega}{\sqrt{r}} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v} \pm \frac{sr}{\omega}\right)}, \tag{13.35}$$

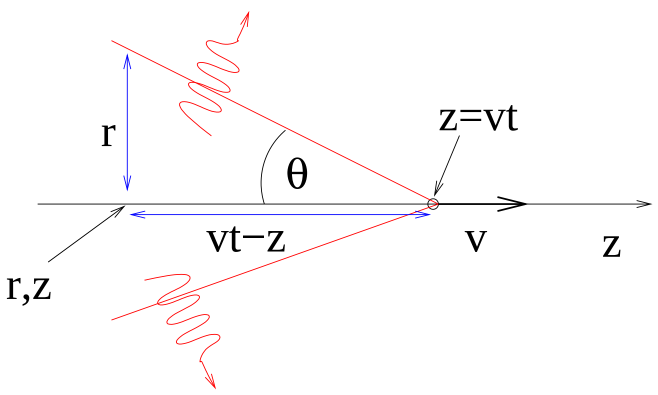
ahol a $-$ előjel adja a kifelé terjedő hullámot (állandó fázis növekvő r-rel). A Cserenkov sugárzás hullámfrontjának a haladási iránnyal bezárt szöge

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{r}{vt - z} = \frac{\omega}{sv} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1}}, \tag{13.36}$$

innen az adott közegben elérhető a leglaposabb szög

$$\mathrm{tg}\vartheta_{\min} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}. \tag{13.37}$$

A c/n határsebességnél a front merőleges $\boldsymbol{v}$-re, a részecskével együtt halad, ennél kisebb sebességnél nincs effektus.



27. ábra. Cserenkov sugárzás hullámfrontja.

14. Ponttöltések kölcsönhatása

A töltések által keltett tereket kifejezzük a töltések koordinátáival, innen a töltésekre effektív egyenlet írható fel.

14.1. Effektív hatás

Induljunk ki az ismert hatásokból ($F^{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}$)

$$S_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ij}F^{ij}\mathrm{d}^4x, \tag{14.1}$$

$$S_{\mathrm{I}} = -\frac{1}{c^2}\int j^i A_i \mathrm{d}^4x. \tag{14.2}$$

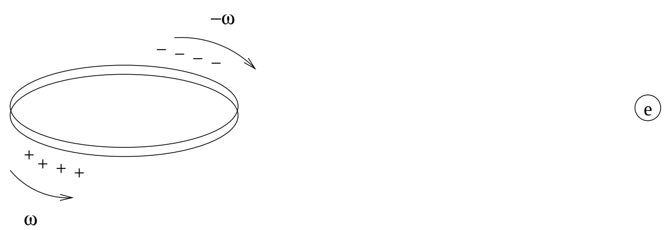
Mint láttuk korábban, innen az A_i szerinti variálással kapjuk

$$
\begin{aligned}
F^{ij}_{\ ,j} &= -\frac{4\pi}{c} j^i, && (14.3)\\
\Rightarrow \quad \int F_{ij}F^{ij}\mathrm{d}^4x = 2\int A_{j,i}F^{ij}\mathrm{d}^4x &= -2\int A_j F^{ij}_{\ ,i}\mathrm{d}^4x = \frac{8\pi}{c}\int A_j j^j \mathrm{d}^4x, && (14.4)\\
\Rightarrow \quad S_\mathrm{I}^\mathrm{eff} = S_\mathrm{I} + S_\mathrm{EM} &= -\frac{1}{2c^2}\int A_i j^i \mathrm{d}^4x, && (14.5)
\end{aligned}
$$

s az utolsó kifejezésbe az áram által keltett tér a Liénard-Wiechert formula alapján beírandó. Labor rendszerben az effektív Lagrange függvény

$$L_\mathrm{I}^\mathrm{eff} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V \left(\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\boldsymbol{A} - \varrho\Phi\right). \tag{14.6}$$

14.2. Paradoxon



28. ábra. Elektromosan pontonként semleges mágneses dipól, $\rho = 0$, $\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{0}$. Az időben változó erősségű dipól ($\dot\omega \neq 0$) a próbatöltésre elektromos erővel hat.

Példa: egymáshoz közeli, ellentétesen töltött, egymással szemben forgó, lassuló gyűrűk. A változó mágneses tér elektromos teret kelt, mely egy (távoli) próbatöltésre erőt gyakorol.

A II. vákuum Maxwell-egyenletet és a $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ alapján

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\varphi. \tag{14.7}$$

Coulomb mértékben a mágneses dipól által keltett vektorpotenciál

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{14.8}$$

Innen a próbatöltésre ható erő

$$\boldsymbol{F} = \frac{e}{c^2}\frac{\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{M}}}{r^3}. \tag{14.9}$$

Milyen erővel hat vissza a nyugvó próbatöltés? Látszólag ilyen erő nincs, mert a dipól pontonként elektromosan semleges, s a próbatöltés mágneses teret nem kelt. Ez azt jelentené, hogy magára hagyva a rendszert, annak teljes impulzusa változna.

14.3. A Coulomb kölcsönhatás első relativisztikus korrekciója: Breit–Darwin formula

Két részecske kölcsönhatását vizsgáljuk. Az önkölcsönhatással nem foglalkozunk, azt az egyrészecske Lagrange függvényhez értjük. Az effektív kölcsönhatás

$$L_{\mathrm{I}}^{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,\left(\frac{1}{c}\boldsymbol{j}_1\boldsymbol{A}_2 + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_2\boldsymbol{A}_1 - \varrho_1\Phi_2 - \varrho_2\Phi_1\right). \tag{14.10}$$

A vezető relativisztikus korrekcióhoz elég a vektorpotenciált a Biot–Savart törvényből számítani,

$$\boldsymbol{A}_i = \frac{1}{c}\frac{e_i\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}. \tag{14.11}$$

Az áram formulája

$$\boldsymbol{j}_1 = e_1\boldsymbol{v}_1\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1), \tag{14.12}$$

ahonnan szimmetrikus kifejezést kapunk

$$2L_{12}^A = \int \mathrm{d}V\,\frac{1}{c}\boldsymbol{j}_1\boldsymbol{A}_2 = \frac{e_1\,e_2}{c^2}\,\frac{\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}_2}{R_{12}} = 2L_{21}^A. \tag{14.13}$$

A skalár potenciálban a Liénard–Wiechert formula első rendjéig el kell mennünk. Használjuk az $R' = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}(t')|$ és $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}(t)|$ jelölést

$$\begin{aligned}
\Phi(\boldsymbol{r},t) &= e\int \mathrm{d}t'\,\frac{\delta\left(t-t'-\frac{R'}{c}\right)}{R'} \\
&\approx e\int \frac{\mathrm{d}t'}{R'}\left(\delta(t-t') - \delta'(t-t')\frac{R'}{c} + \frac{1}{2}\delta''(t-t')\frac{R'^2}{c^2}\right) \\
&= e\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right). \qquad (14.14)
\end{aligned}$$

Az első tag adja a Coulomb energiát, a második annak vezető korrekcióját

$$\begin{aligned}
-2L_{12}^{\Phi} = \int \mathrm{d}V\,\varrho_1\Phi_2 &= e_2\int \mathrm{d}V\,\frac{\varrho_1(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|} + \frac{e_2}{2c^2}\int \mathrm{d}V\,\varrho_1(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2(t)|}{\partial t^2} \\
&= \frac{e_1\,e_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} - 2\Delta L_{12}^{\Phi} \qquad (14.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Delta L_{12}^{\Phi} &= \frac{e_2}{2c^2}\int \mathrm{d}V\,\frac{\partial\varrho_1}{\partial t}\,\frac{\partial|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}{\partial t} + \text{teljes időderivált} \\
&= -\frac{e_2}{2c^2}\int \mathrm{d}V\,(\mathrm{div}\boldsymbol{j}_1)\,\frac{\partial|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}{\partial t} + \ldots \\
&= \frac{e_2}{2c^2}\int \mathrm{d}V\,\boldsymbol{j}_1\cdot\mathrm{grad}\frac{\partial|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}{\partial t} + \text{felületi tag} + \ldots \qquad (14.16)
\end{aligned}$$

Kiszámítjuk a gradienst

$$\frac{\partial \mathrm{grad}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2(t)|}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2(t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2(t)|} = -\frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|} + (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\frac{\boldsymbol{v}_2\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|^3}, \qquad (14.17)$$

végül nyerjük, az $\boldsymbol{R}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ jelöléssel és az áram formulájával

$$2\Delta L_{12}^{\Phi} = \frac{e_1\,e_2}{2c^2}\left\{-\frac{\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}_2}{R_{12}} + \frac{(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{R}_{12})\,(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^3}\right\}. \qquad (14.18)$$

A vezető vektorpotenciálos járulék éppen az első tag -2 szerese, ezzel

$$2\left(\Delta L_{12}^{\Phi} + L_{12}^{A}\right) = \frac{e_1\,e_2}{2c^2}\left\{\frac{\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}_2}{R_{12}} + \frac{(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{R}_{12})\,(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^3}\right\}. \qquad (14.19)$$

Mivel ez szimmetrikus a két részecske felcserélésével szemben, a teljes effektív kölcsönhatási Lagrange függvény a vezető relativisztikus korrekcióval

$$L_{\mathrm{I}}^{\mathrm{eff}} = 2\left(L_{12}^{\Phi} + L_{12}^{A}\right) = -\frac{e_1\, e_2}{R_{12}} + \frac{e_1\, e_2}{2c^2}\frac{1}{R_{12}}\left\{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n}_{12})\,(\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n}_{12})\right\}, \quad (14.20)$$

ahol $\boldsymbol{n}_{12}$ az $\boldsymbol{R}_{12}$ irányú egységvektor. Az effektív kölcsönhatás sebességfüggő! Darwin vezette le, Breit kvantummechanikában alkalmazta.

A kinetikus Lagrange függvény hasonló rendig egy tömegpontra

$$L_{\mathrm{kin}} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + mc^2 \approx \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^4}{8c^2}. \quad (14.21)$$

14.1. Házi feladat. *Határozzuk meg a Hamilton függvényben a kölcsönhatás perturbációját! (10%)*

14.4. Paradoxon?

A Lagrange függvény invariáns a transzlációval szemben, ezért a teljes impulzus megmarad.

Megmaradási tételek az energia-impulzus tenzorral: ${T^{ij}}_{,j} = 0$

$$E = \int T^{00} d^3x, \quad \dot{E} = \int \partial_t T^{00} d^3x = -c\int \nabla_a T^{0a} d^3x = 0 \quad (14.22)$$

$$P^a = c^{-1}\int T^{a0} d^3x, \quad \dot{P}^a = 0 \quad (14.23)$$

$$X^a = \frac{1}{E}\int x^a T^{00} d^3x, \quad \dot{X}^a = -\frac{c}{E}\int x^a \nabla_b T^{0b} d^3x = \frac{c}{E}\int T^{0a} d^3 = c^2 P^a/E \quad (14.24)$$

A teljes impulzus megmaradásából az X^a „energiaközéppont” egyenletes transzlációja következik. Ha ez nyugalomban volt kezdetben, akkor úgy is marad.

E megfontolások a Breit-Darwin mechanikában is érvényesek maradnak.

14.2. Házi feladat. *(25%) Számítsuk ki a próbatöltésre ható erőt! A dipólt alkotó töltések helye $\boldsymbol{r}_i$, sebessége $\boldsymbol{v}_i$. A próbatöltésre: $\boldsymbol{r}$ $(r \gg r_i)$, $\boldsymbol{v}$ $(v \ll v_i)$. Mutassuk meg, hogy e közelítésben, továbbá az elektromos semlegességet a dipól minden helyén feltéve, a próbatöltés $\boldsymbol{p}$ kanonikus impulzusával kapjuk*

$$m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{2c^2 r^3}\sum_i e_i \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{M}}{r^3}. \quad (14.25)$$

14.3. Házi feladat. *(25%) Mutassuk meg, hogy a mágnes energiaközéppontjának időbeli megváltozása*

$$\frac{E_m}{c^2}\dot{\boldsymbol{X}}_m = \boldsymbol{P}_m - \frac{e}{c}\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{M}}{r^3}. \tag{14.26}$$