# EXTRÉM STATISZTIKÁK
# ÉS FIZIKAI ALKALMAZÁSAIK

Speciálkollégium
2007-2008 I. félév
8-10. előadás

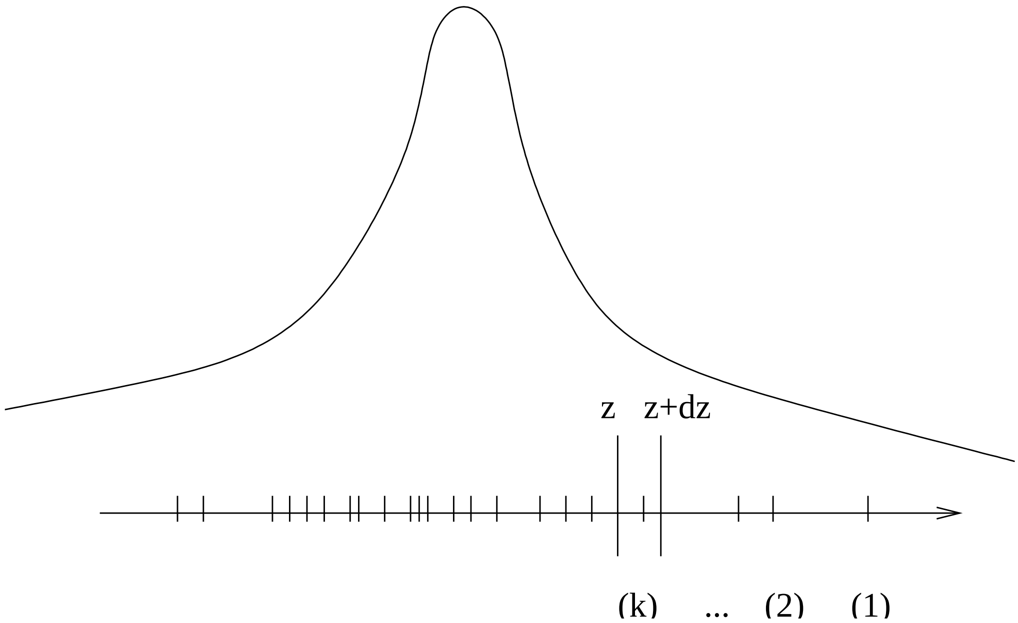
Korábbi anyag, tájékoztatásul közöljük, nem azonos az aktuálissal.



## Tartalomjegyzék

# 1. Extrém statisztikák azonos eloszlású független változókra

## 1.1. A $k$-ik legnagyobb érték eloszlása




1. ábra. Az ős-sűrűség (parent PDF) $\rho(z)$ és a függetlenül választott $\{z_i\}_{i=1}^N$ pontok. A $k$-adik legnagyobb (itt $k = 4$) a $z$ és $z + dz$ közé esik.



Az őseloszlás IPDF-je $\mu(z)$, s legyen

$$m(z) = 1 - \mu(z) = \int_z^{\infty} \mathrm{d}\bar{z}\, \rho(\bar{z}). \tag{1.1}$$

Ha az őseloszlás tartójának felső határa $z^*$, akkor nyilván $m(z) \to 0$ midőn $z \nearrow z^*$. Természetesen lehet $z^* = \infty$.

Annak a valószínűsége, hogy az $N$ változó közül a $k$-ik legnagyobb a $(z, z + \mathrm{d}z)$ intervallumba esik

$$P(z; k, N)\, \mathrm{d}z = N\rho(z)\mathrm{d}z \cdot \binom{N-1}{k-1} m(z)^{k-1} \cdot (1 - m(z))^{N-k}. \tag{1.2}$$

Ez az $m(z)$ változóban ugyanaz, mint a $N - 1$ bináris adatból $k - 1$ darab 1-es esetén visszakövetkeztetett $p$ (az 1-es valószínűsége) Bayes-féle PDF-je.

**1.1. Gyakorló feladat.** *Ellenőrizzük, hogy (1.2) valóban normált!*

A nagy $N$ határesetet vizsgáljuk! Ekkor áttérve a

$$\vartheta = Nm(z) \tag{1.3}$$

változóra, a

$$P(\vartheta;k,N) = P(z;k,N)\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\vartheta}\right| = \binom{N-1}{k-1}\left(\frac{\vartheta}{N}\right)^{k-1}\left(1-\frac{\vartheta}{N}\right)^{N-k}$$
$$= \frac{\vartheta^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\vartheta} + \mathcal{O}(N^{-1}). \tag{1.4}$$

Ez a Gamma-eloszlás egész $k$ paraméterrel. Látható, $\vartheta$-ban már nemdegenerált (egy nagyságrendű változóra egy nagyságrendű sűrűség) eloszlást kaptunk. Ezért a karakterisztikus $z$ értékek mellett $\vartheta(z) = \mathcal{O}(1)$.

NB: egyelőre a $\vartheta$ változóban kaptuk meg a PDF-et, azonban az őseloszlást, s ezért $\vartheta(z) = Nm(z)$ konkrét alakját nem feltétlenül ismerjük, tehát további megfontolásokra van szükség. Továbbá a nagy $N$ limeszt is ki szeretnénk használni, amel mellett keressük $z$ jellegzetes értékeit.



## 1.2. Lineáris változócsere

Vizsgáljuk a felülről nem korlátos változó esetét. Ilyenkor az empirikus maximumok divergálnak, s a momentumaik is szingulárisak lehetnek. Az a célunk, hogy lineáris transzformációval $\mathcal{O}(1)$ nagyságrendű, nemdegenerált eloszlású véletlen változóhoz jussunk. Ez utóbbit $y$-nal jelöljük. Ilyen transzformáció empirikusan is elvégezhető. Ha pl. az első két kumuláns "nem látszik" divergálni, akkor skálázhatjuk az adatokat ilymódon $y = \frac{z-\bar{z}}{\Delta z}$.

Keressük tehát azt a függvényt, amely az egységnyi nagyságrendű $y$ és a divergens $z$ között aszimptotikusan lineáris relációt teremt. A PDF-et ismerjük $\vartheta$ függvényében, meghatározandó tehát $y = f(\vartheta)$, melyre teljesül, hogy $y = f(\vartheta(z))$ aszimptotikusan lineáris függvényt eredményez $y$ és $z$ között. Emlékeztetünk arra, hogy $\vartheta(z) = Nm(z)$. Valamely $\bar{z}$ körül fejtünk sorba

$$y = f(\vartheta(z)) = f(\vartheta(\bar{z})) + f'(\vartheta(\bar{z}))\vartheta'(\bar{z})(z-\bar{z})$$
$$+ \frac{1}{2}(f''(\vartheta(\bar{z}))\vartheta'(\bar{z})^2 + f'(\vartheta(\bar{z}))\vartheta''(\bar{z}))(z-\bar{z})^2 + \dots. \tag{1.5}$$

Az első tag egységnyi nagyságrendű, azaz $\vartheta(\bar{z}) = Nm(\bar{z}) = \mathcal{O}(1)$. Ez némi önkényt megenged $\bar{z}$ választásában, de mint később látjuk, a nagyságrendjét meghatározhatja. A lineáris tag is egységnyi rendű, ezért a $\Delta z = z - \bar{z}$ szórás nagyságrendje

$$\Delta z \sim |f'(\vartheta)\vartheta'|^{-1}. \tag{1.6}$$

A másodrendű tagnak el kell tűnnie, hogy $y$ és $z$ között lineáris reláció álljon fenn. Ezért divergáló $z$ argumentumra (a vonást elhagyjuk)

$$\frac{f''(\vartheta)}{f'(\vartheta)} + \frac{\vartheta''}{\vartheta'^2} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f''(\vartheta)\vartheta}{f'(\vartheta)} \approx -\frac{m''(z)m(z)}{m'(z)^2}. \tag{1.7}$$

Például

- Hatványnál gyorsabb lecsengés: $m(z) \approx A\exp -\frac{z^r}{r}$, $(r > 0)$, $m'(z) \approx -z^{r-1}m(z)$, $m''(z) \approx z^{2(r-1)}m(z)$, ahonnan

$$\frac{m''(z)m(z)}{m'(z)^2} \to 1. \tag{1.8}$$

- Ellenpélda: $m(z) \approx A\exp(-z + a\sin z)$, ahol $|a| \leq 1$, hogy a PDF ne lehessen negatív. Most $\frac{m''(z)m(z)}{m'(z)^2} \approx 1 - \frac{a\sin z}{(1-a\cos z)^2}$, azaz nem kapunk $f(\vartheta)$-ra $z$-független egyenletet, ilyenkor nincs szokásos extrém határeloszlás.



- Hatvány lecsengés: $m(z) \approx Az^{-\mu}$, $(\mu > 0)$, $m'(z) \approx -\mu m(z)/z$, $m''(z) \approx \mu(\mu + 1)m(z)/z^2$, ahonnan

$$\frac{m''(z)m(z)}{m'(z)^2} \to \frac{\mu+1}{\mu}. \tag{1.9}$$

**1.2. Gyakorló feladat.** *Vizsgáljuk az $m''m/m'^2$ limeszét az őseloszlás más aszimptotikái mellett. (i) $m(z) \approx Az^s \exp -\frac{z^r}{r}$, (ii) $m(z) \approx A\exp - \ln^s(z)$, $s > 1$, (iii) $m(z) \approx Az^{-\mu}\ln z$. Az (i-ii) esetben az őseloszlás minden hatványnál gyorsabban cseng le, az (iii) esetben a $\mu$ kitevőjű hatvány lecsengéstől logaritmikusan tér el.*

## 1.3. Hatványnál gyorsabb lecsengés: Fisher-Tippett-Gumbel (FTG)

A hatványnál gyorsabban lecsengő őseloszlás esete. Egyelőre felülről nem korlátos változókat vizsgálunk (az őseloszlás tartója a végtelenig terjed), később látni fogjuk, hogy korlátos változókra is érvényesek a megfontolások.

A (1.7,1.8) formulák alapján a következő differenciálegyenletet kapjuk

$$f''(\vartheta)\vartheta/f'(\vartheta) = -1. \tag{1.10}$$

Innen

$$\begin{aligned} (\ln f')' &= -1/\vartheta \quad \Rightarrow \quad \ln f' = -\ln \vartheta / a \quad \Rightarrow \\ f' &= a/\vartheta \quad \Rightarrow \quad y = f(\vartheta) = a \ln(\vartheta/b). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Az integrációs állandók változtatása $y$-ban lineáris transzformációt okoz. Márpedig az egységnyi nagyságrendű ($N$-től nem függő) együtthatókkal lineárisan egymásba vihető eloszlásokat ekvivalensnek tekintjük, ezért $a, b$ önkényesen választhatók.

Kimutatható, hogy a (1.5) sorfejtés magasabb rendjei eltűnésének feltétele a (1.8)-hoz hasonló relációk, az $m(z)$ magasabb deriváltjaival. Csakhogy ha $m(z)$ minden hatványnál gyorsabban cseng le, akkor ilyenek a deriváltjai is, ezért e relációk teljesülnek.

Tekintsük a $-a = b = 1$ választást, ekkor $\vartheta = e^{-y}$, és (1.4) alapján

$$P_{\mathrm{FTG}}(y;k) = \frac{\vartheta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\vartheta} \left| \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}y} \right| = \frac{1}{(k-1)!} \exp(-ky - e^{-y}). \tag{1.12}$$

Ez a $k$-adik maximumra vonatkozó FTG határeloszlás.



Alternatív alak: $b = k$ mellett kapjuk

$$\tilde{P}_{\mathrm{FTG}}(y;k) = \frac{1}{(k-1)!} \left(k \exp(-y - e^{-y})\right)^k. \tag{1.13}$$

Könnyű megjegyezni, ez a $k = 1$ sűrűségfüggvény "$k$-adik hatványa", normálva — a fizikai irodalomban gyakorta ezt idézik.

**1.3. Gyakorló feladat.** *Mutassuk meg, hogy $P_{\mathrm{FTG}}$ momentum generátor függvénye $\Phi(w) = \left\langle e^{iwy} \right\rangle = \frac{\Gamma(k-iw)}{\Gamma(k)}$. (Útmutató: vezessük be az $u = e^{-y}$ új változót!)*

Innen a kumuláns generátor $\Psi(w) = \ln \Phi(w)$ és a kumulánsok

$$c_n = (-i)^n \Psi^{[n]}(0) = (-1)^n \psi^{[n-1]}(k), \tag{1.14}$$

ahol

$$\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x) \tag{1.15}$$

a digamma vagy pszi, a $\psi^{[n]}(x)$ pedig az $n$-edik poligamma függvény.

A szórással skálázott FTG függvény: az

$$x = \frac{y - c_1}{\sqrt{c_2}} \tag{1.16}$$

változóban a PDF várható értéke zérus és varianciája egységnyi. Pl. a $k=1$ esetben

$$c_1 = -\Psi(1) = \gamma = 0.5772156649\cdots = \lim_{n\to\infty}(\sum_{\ell=1}^{n} 1/\ell - \ln n) \tag{1.17}$$

(az Euler-Mascheroni állandó) és

$$c_2 = \Psi'(1) = \zeta(2) = \sum_{\ell=1}^{\infty} 1/\ell^2 = \pi^2/6 = a^2. \tag{1.18}$$

Ezért az

$$\langle x\rangle = 0, \quad \langle x^2\rangle = 1 \tag{1.19}$$

módon (varianciával) skálázott $k=1$ FTG függvény

$$P(x;1) = a\exp(-\gamma - ax - e^{-\gamma-ax}). \tag{1.20}$$

**1.1. Házi feladat.** *Mutassuk meg, hogy nagy $k$ mellett a skálázott FTG a normál eloszláshoz tart! Ajánlott módszerek (i) a pszi függvény tulajdonságai alapján vizsgáljuk a (1.14) kumulánsokat, vagy (ii) a (1.12) exponensét fejtsük ki a nyeregpontjának környezetében. (15%)*

Az extremális $z$ változó átlaga $N$-nel divergál, s a szórása is mutathat szingularitást.



Meghatározzuk a szingularitás $N$-függését az $m(z) \propto \exp(-z^r/r)$ esetben. Az átlagra s egyben $z$ tipikus értékeire fennáll

$$\vartheta(\bar{z}) = Nm(\bar{z}) = \mathcal{O}(1) \propto N\exp(-\bar{z}^r/r) \quad \Rightarrow \quad \bar{z} \propto \sqrt[r]{\ln N}. \tag{1.21}$$

A $\Delta z$ szórásra (1.6) alapján kapjuk

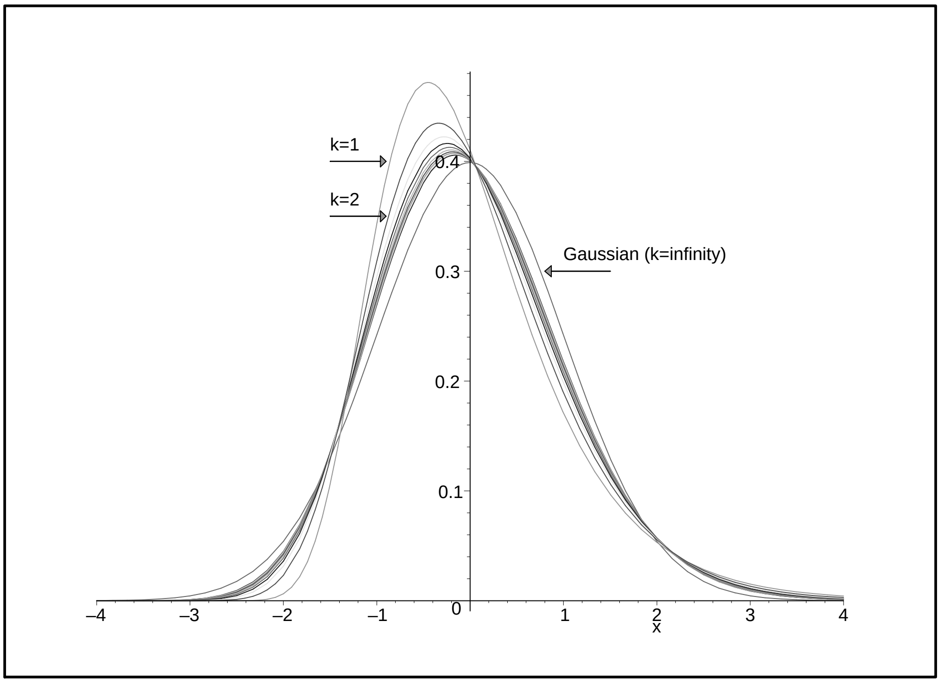
$$\Delta z \propto |f'(\vartheta)\vartheta'|^{-1} \approx \left(\frac{1}{\vartheta} z^{r-1}\vartheta\right)^{-1} \propto (\ln N)^{(1-r)/r}. \tag{1.22}$$

Mivel $\Delta z/\bar{z} \propto (\ln N)^{-1}$, az empirikus $z$ eloszlása a $\bar{z}$ skáláján a Dirac-deltához tart.

Gyakorlati eredmény: Ha az empirikus $k$-adik maximum átlaga és varianciája adott $N$ mellett $\bar{z} = \langle z\rangle_N$ és $\Delta z = \sqrt{\langle z^2\rangle_N - \langle z\rangle_N^2}$ akkor az

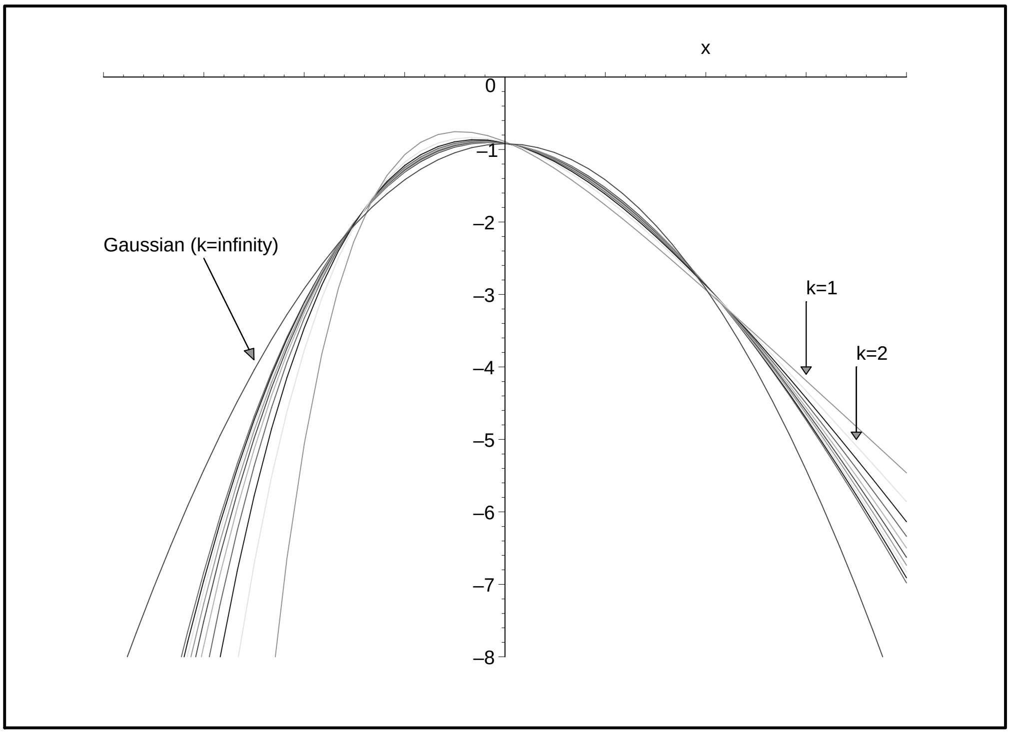
$$x = \frac{z-\bar{z}}{\Delta z} \tag{1.23}$$

eloszlása a $k$-adik, varianciával skálázott FTG függvényhez tart nagy $N$ mellett.




2. ábra. Az FTG függvény a $k = 1 \ldots 10$ esetekben és a Gauss-függvény ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$). Növekvő $k$ mellett a csúcs jobbra mozdul, s a görbék a gaussihoz tartanak.






3. ábra. A 2. ábra szemilog skálán.

## 1.4. Hatvány lecsengés a végtelenben: Fisher-Tippett-Fréchet (FTF)

Az integrált őseloszlás nagy $z$-re csengjen le hatványfüggvényként, azaz $m(z) = Az^{-\mu} = \vartheta(z)/N$, ahol $\mu > 0$. A (1.7,1.9) alapján az $f$ transzformációs függvényt meghatározó differenciálegyenlet

$$f''(\vartheta)\vartheta/f'(\vartheta) = -(\mu+1)/\mu \quad \Rightarrow \quad y = f(\vartheta) = a + (\vartheta/b)^{-1/\mu}. \tag{1.24}$$

Ha $a = 0,\ b = 1$, akkor $y = \vartheta^{-1/\mu} = z(NA)^{-1/\mu}$, ahonnan

$$P_{\mathrm{FTF}}(y;k) = \frac{\vartheta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\vartheta} \left| \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}y} \right| = \frac{\mu}{(k-1)!} y^{-k\mu-1} \exp(-y^{-\mu}). \tag{1.25}$$

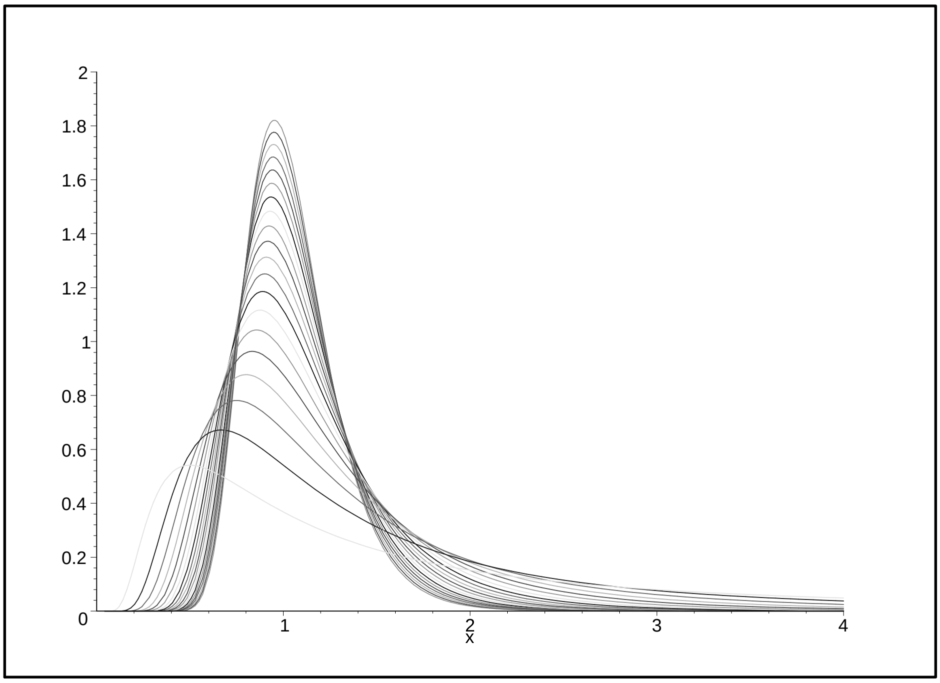
**1.4. Gyakorló feladat.** *Mutassuk meg, hogy a momentumok* $m_n = \langle x^n \rangle = \Gamma(k - \frac{n}{\mu})/\Gamma(k)$, *ha* $k\mu > n$. *A formula negatív* $n$*-re is érvényes.*

A $z$ empirikus változó $n$-edik nem divergáló momentumának nagyságrendje $N^{n/\mu}$. Egységes alak: pl. az $m_{-1} = \langle 1/y \rangle$ paraméterrel skálázzuk, $x = m_{-1}y \Rightarrow \langle 1/x \rangle = 1$.

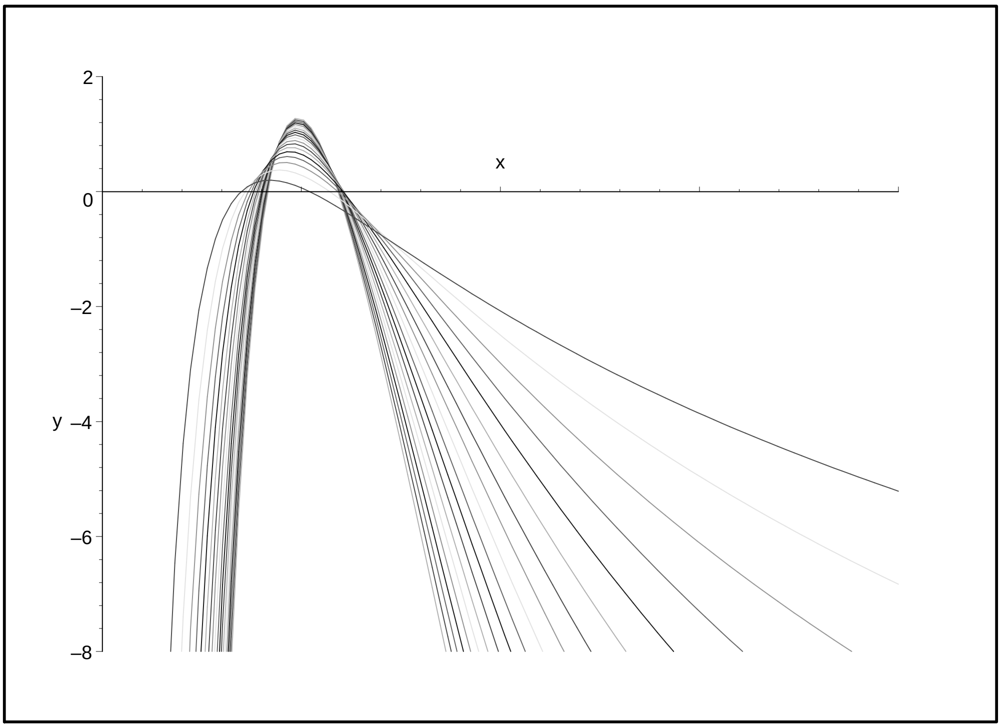
Ha $k \to \infty$, akkor a szórás szerint skálázva, ld. (1.16), a sztenderd Gausst kapjuk.

A $\mu \to \infty$ limeszben (1.25)-ből az $y = 1 + x/\mu$ helyettesítéssel kapjuk az FTG-t.



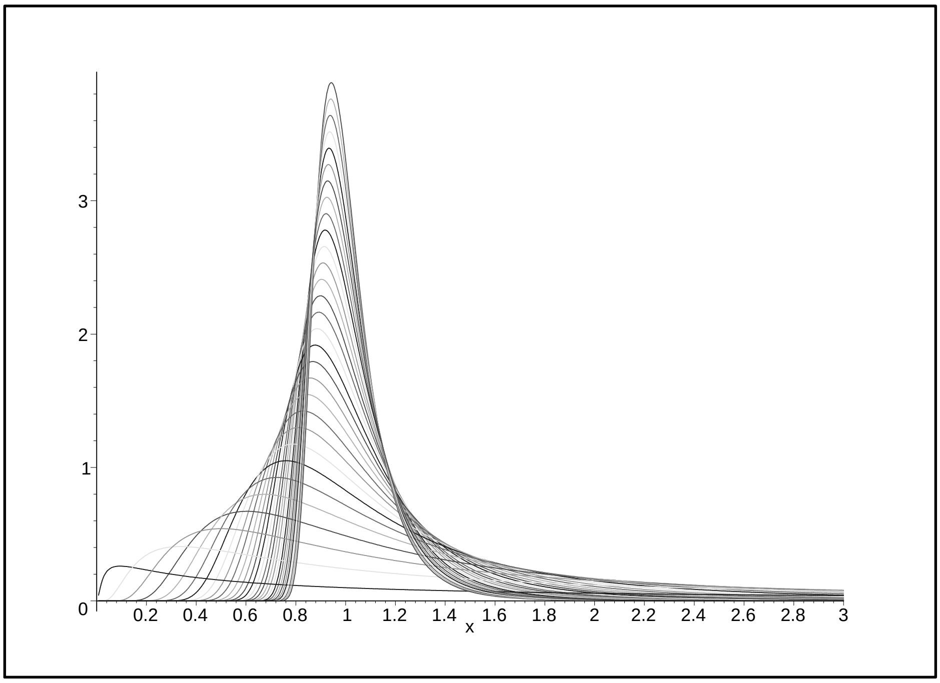



4. ábra. Az FTF sűrűség a $\mu = 1, k = 1 \ldots 20$ és $\langle 1/x \rangle = 1$ mellett. A nagy $k$ határeset a Dirac delta, amelyet a szórás szerint átskálázva, azaz $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 1$ beállításával Gauss eloszlást kapunk.

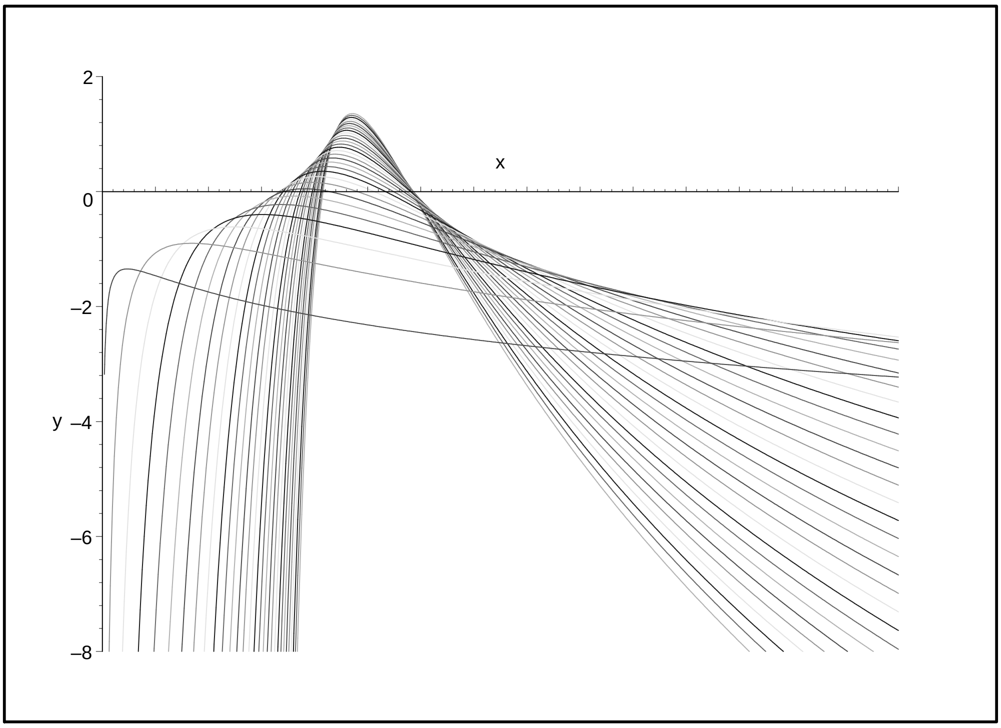



5. ábra. A 4. ábra szemilog skálán.






6. ábra. Az FTF sűrűség a $k = 1$, $\mu = 1/3, 2/3, 1, \ldots 10$ és $\langle 1/x \rangle = 1$ mellett. Növekvő $\mu$-vel a Dirac deltához tart, amelyből a szórás szerint skálázva az FTG eloszlás adódik.




7. ábra. A 6. ábra szemilog skálán.



## 1.5. Hatvány lecsengés véges felső határon: Weibull

Az őseloszlás legyen aszimptotikusan $m(z) = A(z^* - z)^\nu = \vartheta(z)/N$. A korábbihoz hasonló gondolatmenettel az

$$y = \vartheta^{1/\nu} = (z^* - z)(NA)^{1/\nu} \tag{1.26}$$

változó reciprokában az FTF eloszlást kapjuk. Azaz

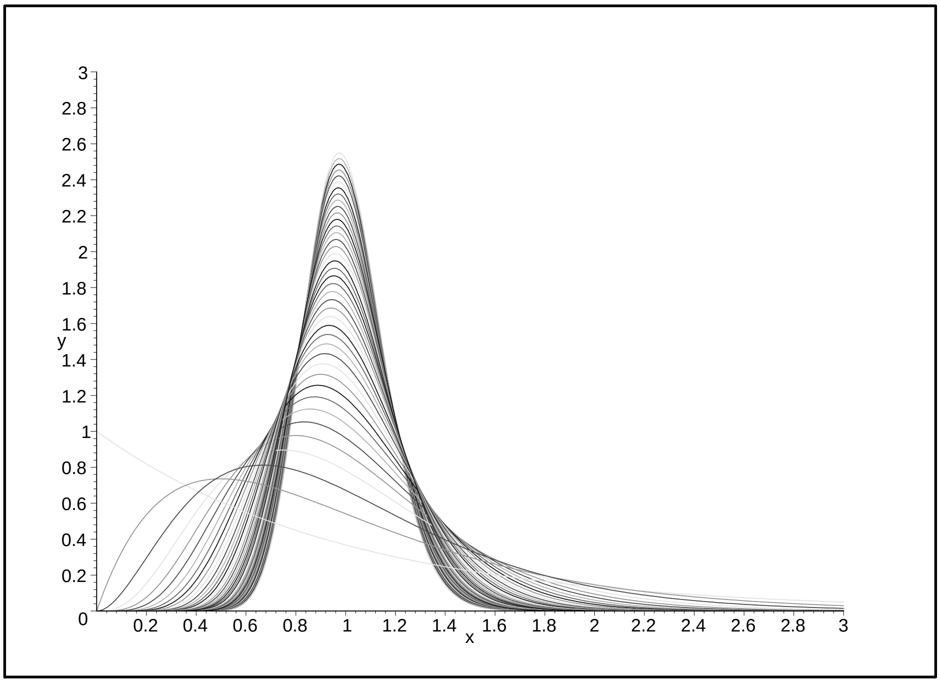
$$P_{\mathrm{W}}(y;k) = \frac{\vartheta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\vartheta} \left| \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}y} \right| = \frac{\nu}{(k-1)!} y^{k\nu - 1} \exp(-y^\nu). \tag{1.27}$$

A momentumok $m_n = \Gamma(k + \frac{n}{\nu})/\Gamma(k)$. Egységes formulát pl. az átlag beállításával kaphatunk, $x = y/m_1 \Rightarrow \langle x \rangle = 1$.

Ha az eloszlást olymódon skálázzuk, hogy az átlag zérus és a szórás egy legyen, akkor $k \to \infty$ esetén a sztenderd Gausst kapjuk.

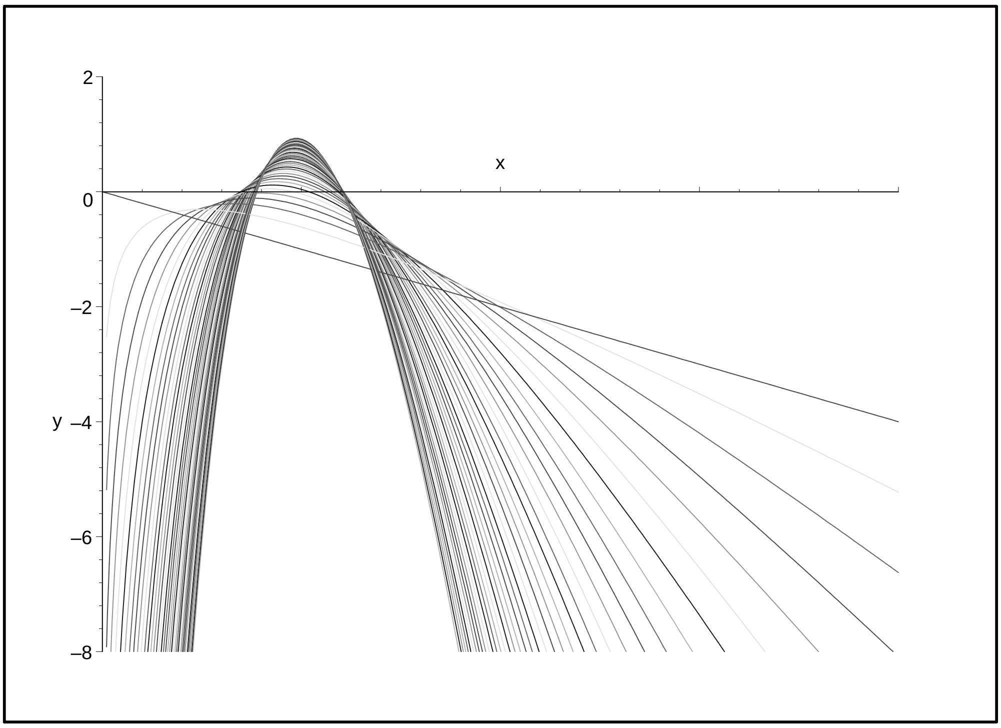
A $\nu \to \infty$ mellett (1.27)-be az $y = 1 - x/\nu$-t helyettesítve az FTG adódik, ez a véges felső határnál minden hatványnál gyorsabban lecsengő őseloszlás esete.

N.B: Az abszcisszát tükröztük, (1.27)-ben kis $y$ felel meg a $z^*$ felső határhoz közelebbi változóknak. Szokás az eredeti irányt visszaállítva a Weibull eloszlást $-y \to y$ helyettesítéssel felírni, azaz $y$-t a negatív félegyenesen értelmezni.

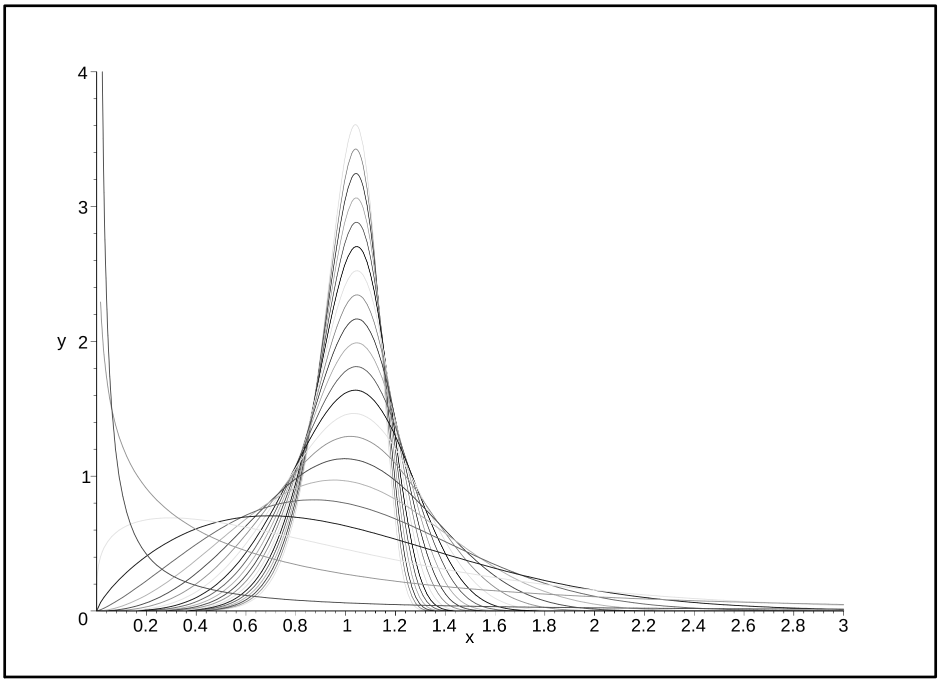



8. ábra. A Weibull sűrűség az $\langle x \rangle = 1$, $\nu = 1$, $k = 1 \ldots 20$ mellett. A nagy $k$ határeset a Dirac delta, a szórás szerint skálázva gaussi. Kis $y$ felel meg nagy $z$-knek.



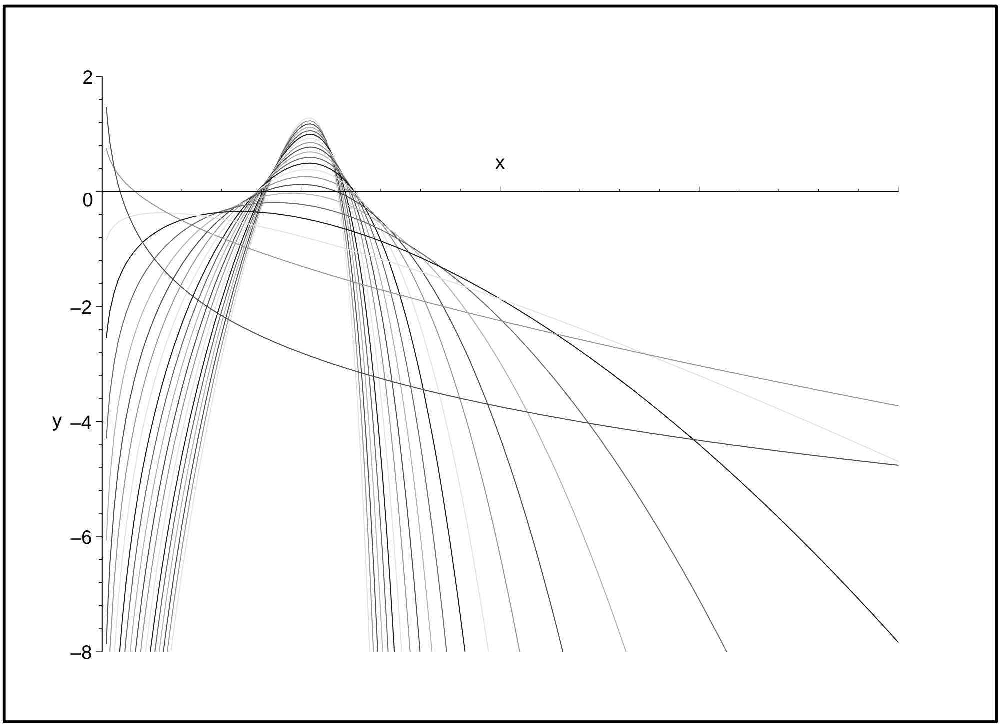



9. ábra. A 8. ábra szemilog skálán.




10. ábra. A Weibull sűrűség az $\langle x\rangle = 1$, $k = 1$ és $\nu = 0.25, 0.75, 1.25, \ldots 10.25$ mellett. Növekvő $\nu$-vel a Dirac deltához közelít, amelyet a szórás szerint skálázva az FTG-t kapjuk.






11. ábra. Mint a 10. ábra szemilog skálán.

## 1.6. Egyesített extrém határeloszlás függvény

$$P(x;k) = \frac{1}{b(k-1)!}\left(1+\gamma\frac{x-a}{b}\right)^{-k/\gamma-1} \exp\left[-\left(1+\gamma\frac{x-a}{b}\right)^{-1/\gamma}\right] \tag{1.28}$$

a $\gamma(x-a) > -b$ tartományban, $b > 0$. (Itt $\gamma$ paraméter, nem az E-M állandó!) Az eddig bemutatott eseteket visszakapjuk

$$\begin{aligned} \gamma = 1/\mu > 0 &\sim \text{ FTF,} \\ \gamma \to 0 &\sim \text{ FTG,} \\ \gamma = -1/\nu < 0 &\sim \text{ Weibull.} \end{aligned} \tag{1.29}$$

A paraméterek

$$\begin{aligned} a &\sim \text{ eltolás,} \\ b &\sim \text{ skála,} \\ \gamma &\sim \text{ alak.} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Olyan illesztéseknél érdemes használni (1.28)-t, ahol nem tudjuk biztosan a határeloszlás típusát, csupán azt sejtjük, azonos eloszlású, független eseményekről van szó.



## 1.7. Extrém értékek szimultán eloszlása

Milyen szimultán eloszlásnak tesz eleget a $k$ legnagyobb változó? A változók sorrendjét rögzítjük – "order statistics".

A $k = 2$ példáját vizsgáljuk először, rögzített sorrend mellett ($z_1 > z_2$):

$$P(z_1, z_2) = \Theta(z_1 - z_2) N(N-1)\rho(z_1)\rho(z_2)(1 - m(z_2))^{N-2}. \tag{1.31}$$

**1.5. Gyakorló feladat.** *Mutassuk meg, hogy az* $\int P(z_1, z_2)\mathrm{d}z_2 = P(z_1)$ *éppen a (1.2)-beli* $N\rho(z_1)(1 - m(z_1))^{N-1}$ *eloszlás a* $k = 1$ *mellett.*

Ha $N \to \infty$ akkor

$$P(z_1, z_2) = \Theta(z_1 - z_2)\, N\rho(z_1)\, N\rho(z_2)\, e^{-Nm(z_2)}. \tag{1.32}$$

Hatványnál gyorsabban lecsengő őseloszlás esetén a $\vartheta = Nm(z) = e^{-y}$ helyettesítéssel élünk, ahonnan

$$P(y_1, y_2) = \Theta(y_1 - y_2)\, \exp\left(-y_1 - y_2 - e^{-y_2}\right), \tag{1.33}$$

**1.6. Gyakorló feladat.** *Számítsuk ki a $P(y_1, y_2)$ alapján az $y_1$ ill. az $y_2$ eloszlását és értelmezzük az eredményt.*

Hasonló eljárással adódik tetszőleges $k$-ra

$$P(y_1, \ldots y_k) = \prod_{j=1}^{k-1} \Theta(y_j - y_{j+1}) \cdot \exp\left( -\sum_{j=1}^{k} y_j - e^{-y_k} \right), \tag{1.34}$$

**1.7. Gyakorló feladat.** *Írjuk fel a szimultán eloszlásokat megadó egyesített extremális határeloszlás függvényt!*

## 1.8. Invariancia – "max-stabilitás"

A $k = 1$ határeloszlások integrált eloszlásfüggvénye minden pozitív egész $N$ mellett kielégíti a

$$M^N(a_N + xb_N) = M(x) \tag{1.35}$$

egyenletet megfelelő $a_N, b_N$ választással. Ez a max-stabilitás tulajdonsága („max" itt az extremális statisztikára utal, nem a stabilitás maximális). Fordítva, ezen egyenlet



megoldása épp az egyesített határeloszlás formula – ezt a 1.3 házi feladatban tűztük ki.

## 1.9. Extrém statisztikus inferencia

Az előzőekben paraméterezett PDF-eket kaptunk. A Bayes-elv szerint, ha $P(x; a)$ valamely $a$ paraméterrel jellemzett PDF, s rendelkezésünkre áll $n$ függetlenül generált $x_n$ adat, akkor, egyenletes prior eloszlást feltételezve, a paraméterre szóló hipotézis PDF-je

$$P(a|x_1, \ldots x_n) = \frac{\prod_{j=1}^{n} P(x_n; a)}{\int \mathrm{d}a \prod_{j=1}^{n} P(x_n; a)}. \tag{1.36}$$

A hagyományos "maximum likelihood" módszer ennek maximumában keresi a paraméterre szóló becslést. A Bayes-formula ezen túlmenően a teljes eloszlást, s ezzel a becslés középértékét és varianciáját is megadja. Technikai nehézséget jelenthet azonban a numerikus normálás.

A kifejezés többdimenziós paramétertérre könnyen kiterjeszthető.

Ha az empirikus maximumok független, azonos őseloszlású változók extremumai, akkor a (1.28) képlettel felírt (1.36) megadja a paraméterek eloszlását. N.B: A véges $N$ "batch" méretből származó hibáról az eljárás nem ad számot.

## 1.10. Feladatok

**1.2. Házi feladat.** *Írjuk fel az eddig tárgyalt határeloszlások integrált eloszlásfüggvényeit (IPDF-eit). (i) Kezdjük a* $k = 1$ *egyesített esettel, majd a szimultán PDF-ekre és a* $k$*-adik legnagyobb érték PDF-jére is oldjuk meg a feladatot. Ez utóbbihoz alkalmazzunk parciális integrálásokat. (ii) Az integrális eloszlásfüggvényre fel tudunk-e írni invariancia feltételt* $k > 1$ *esetén? (25%)*

**1.3. Házi feladat.** *Próbáljuk megoldani a (1.35) egyenletet! Ha ez nehéznek bizonyul, vizsgáljuk azt a problémát, amelyben* $N$ *helyén folytonos változó áll. (25%)*

**1.4. Házi feladat.** *Eddig a független, azonos eloszlású változók extremálisait vizsgáltuk. Különböző őseloszlásokból válogatott változók maximumát tekintve kaphatunk-e határeloszlást? Javasoljunk ehhez elégséges feltételt! (25%)*

Ne bátortalandjunk el, ha csak részmegoldást érünk el, az is lehet értékelhető.