

EXTRÉM STATISZTIKÁK ÉS FIZIKAI ALKALMAZÁSAIK

8-10. előadás

A "királyi út", végesméret korrekciók, és extrém eloszlások véletlen felületeken

Györgyi Géza

ELTE, Elméleti Fizikai Tanszék

8. előadás

Bevezetés

- Az előző előadásokon áttekintettük a max-stabil határeloszlásokat i.i.d. változók esetére.

Bevezetés

- Az előző előadásokon áttekintettük a max-stabil határeloszlásokat i.i.d. változók esetére.
- Az alkalmazások szempontjából fontos kérdés, az empirikus eloszlások milyen gyorsan konvergálnak, ha $N \rightarrow \infty$.

Bevezetés

- Az előző előadásokon áttekintettük a max-stabil határeloszlásokat i.i.d. változók esetére.
- Az alkalmazások szempontjából fontos kérdés, az empirikus eloszlások milyen gyorsan konvergálnak, ha $N \rightarrow \infty$.
- I.i.d. őseloszlások esetén algoritmus adható tetszőleges korrekció számítására.

Bevezetés

- Az előző előadásokon áttekintettük a max-stabil határeloszlásokat i.i.d. változók esetére.
- Az alkalmazások szempontjából fontos kérdés, az empirikus eloszlások milyen gyorsan konvergálnak, ha $N \rightarrow \infty$.
- I.i.d. őseloszlások esetén algoritmus adható tetszőleges korrekció számítására.
 - Az alábbiakban:

Bevezetés

- Az előző előadásokon áttekintettük a max-stabil határeloszlásokat i.i.d. változók esetére.
- Az alkalmazások szempontjából fontos kérdés, az empirikus eloszlások milyen gyorsan konvergálnak, ha $N \rightarrow \infty$.
- I.i.d. őseloszlások esetén algoritmus adható tetszőleges korrekció számítására.
 - Az alábbiakban:
- Tömören újra levezetjük a max-stabil határeloszlásokat – von Mises aszimptotika.

Bevezetés

- Az előző előadásokon áttekintettük a max-stabil határeloszlásokat i.i.d. változók esetére.
- Az alkalmazások szempontjából fontos kérdés, az empirikus eloszlások milyen gyorsan konvergálnak, ha $N \rightarrow \infty$.
- I.i.d. őseloszlások esetén algoritmus adható tetszőleges korrekció számítására.
 - Az alábbiakban:
- Tömören újra levezetjük a max-stabil határeloszlásokat – von Mises aszimptotika.
- Következésképpen a nagy küszöb fölötti értékek un. Pareto eloszlását is megkapjuk.

Bevezetés

- Az előző előadásokon áttekintettük a max-stabil határeloszlásokat i.i.d. változók esetére.
- Az alkalmazások szempontjából fontos kérdés, az empirikus eloszlások milyen gyorsan konvergálnak, ha $N \rightarrow \infty$.
- I.i.d. őseloszlások esetén algoritmus adható tetszőleges korrekció számítására.
 - Az alábbiakban:
- Tömören újra levezetjük a max-stabil határeloszlásokat – von Mises aszimptotika.
- Következésképpen a nagy küszöb fölötti értékek un. Pareto eloszlását is megkapjuk.
- Az új formalizmusból kapjuk a véges méret korrekciókat.

Előzmények

- Fisher & Tippett: véges N -nél módosított exponens (γ az egyesített PDF-ben) jobb lehet, mint az igazi — "penultimate" határeloszlás.

Előzmények

- Fisher & Tippett: véges N -nél módosított exponens (γ az egyesített PDF-ben) jobb lehet, mint az igazi — "penultimate" határeloszlás.
- Régen észrevették, hogy a $\rho(z) = \exp(-z)$ őseloszlásnál a konvergencia gyorsabb, mint Gauss esetén.

Előzmények

- Fisher & Tippett: véges N -nél módosított exponens (γ az egyesített PDF-ben) jobb lehet, mint az igazi — "penultimate" határeloszlás.
- Régen észrevették, hogy a $\rho(z) = \exp(-z)$ őseloszlásnál a konvergencia gyorsabb, mint Gauss esetén.
- de Hahn & Resnick, 1996: megadták a vezető végesméret korrekciót általános őseloszlásra. 1999-ben másodrendű korrekció (Gomes & de Hahn).

Előzmények

- Fisher & Tippett: véges N -nél módosított exponens (γ az egyesített PDF-ben) jobb lehet, mint az igazi — "penultimate" határeloszlás.
- Régen észrevették, hogy a $\rho(z) = \exp(-z)$ őseloszlásnál a konvergencia gyorsabb, mint Gauss esetén.
- de Hahn & Resnick, 1996: megadták a vezető végesméret korrekciót általános őseloszlásra. 1999-ben másodrendű korrekció (Gomes & de Hahn).
- Fizikai példa: A Wiener folyamat (csillapítás nélküli Brown mozgás 1 tér és 1 idő dimenzióban, $\dot{x}(t) = \xi(t)$ fehér zaj) maximumának eloszlása, s annak végesméret korrekciója (Majumdar & Comtet, 2005).

Az egyesített eloszlás felé

Újrdefiniáljuk a $g(z)$ függvényt sorfejtés nélkül. Az ős IPDF legyen

$$\mu(z) = \exp(-\exp(-g(z))), \quad (1)$$

amelyből $\mu(z) \rightarrow 1$ mellett visszacapjuk $g(z)$ korábbi definícióját, $\mu \approx 1 - e^{-g}$, (1) azonban minden z -re érvényes.

Az egyesített eloszlás felé

Újraderfiniáljuk a $g(z)$ függvényt sorfejtés nélkül. Az ős IPDF legyen

$$\mu(z) = \exp(-\exp(-g(z))), \quad (1)$$

amelyből $\mu(z) \rightarrow 1$ mellett visszacapjuk $g(z)$ korábbi definícióját, $\mu \approx 1 - e^{-g}$, (1) azonban minden z -re érvényes. Lineáris változócsere: $z = a_N y + b_N$, ahol elvárjuk, hogy $y = \mathcal{O}(1)$. Ekkor az extrém IPDF

$$M_N(y) = \mu^N(a_N y + b_N) = \exp(-N \exp(-g(a_N y + b_N))).$$

Az egyesített eloszlás felé

Újradefiniáljuk a $g(z)$ függvényt sorfejtés nélkül. Az ős IPDF legyen

$$\mu(z) = \exp(-\exp(-g(z))), \quad (1)$$

amelyből $\mu(z) \rightarrow 1$ mellett visszacapjuk $g(z)$ korábbi definícióját, $\mu \approx 1 - e^{-g}$, (1) azonban minden z -re érvényes. Lineáris változócsere: $z = a_N y + b_N$, ahol elvárjuk, hogy $y = \mathcal{O}(1)$. Ekkor az extrém IPDF

$$M_N(y) = \mu^N(a_N y + b_N) = \exp(-N \exp(-g(a_N y + b_N))).$$

Az N kompenzálható, ha $N = \exp(g(b_N))$, ekkor

$$-\ln(-\ln M_N(y)) = g(b_N + a_N y) - g(b_N)$$

Az egyesített eloszlás felé

Újrdefiniáljuk a $g(z)$ függvényt sorfejtés nélkül. Az ős IPDF legyen

$$\mu(z) = \exp(-\exp(-g(z))), \quad (1)$$

amelyből $\mu(z) \rightarrow 1$ mellett visszacapjuk $g(z)$ korábbi definícióját, $\mu \approx 1 - e^{-g}$, (1) azonban minden z -re érvényes. Lineáris változócsere: $z = a_N y + b_N$, ahol elvárjuk, hogy $y = \mathcal{O}(1)$. Ekkor az extrém IPDF

$$M_N(y) = \mu^N(a_N y + b_N) = \exp(-N \exp(-g(a_N y + b_N))).$$

Az N kompenzálható, ha $N = \exp(g(b_N))$, ekkor

$$-\ln(-\ln M_N(y)) = g\left(b_N + a_N \boxed{y}\right) - g(b_N) \rightarrow f(y)?$$

$f'(0) = 1$ beállítható az $a_N = 1/g'(b_N)$ választással. A lineáris transzformáció tehát

$$z = g^{-1}(\ln N) + g^{-1}'(\ln N) y$$

Von Mises aszimptotika

Mivel csak azt használjuk ki, hogy $b_N \nearrow z^*$, azért egyelőre z -t írunk helyette, a kérdés tehát

$$\lim_{z \nearrow z^*} g \left(z + \frac{y}{g'(z)} \right) - g(z) = f(y)? \quad (2)$$

Von Mises aszimptotika

Mivel csak azt használjuk ki, hogy $b_N \nearrow z^*$, azért egyelőre z -t írunk helyette, a kérdés tehát

$$\lim_{z \nearrow z^*} g \left(z + \frac{y}{g'(z)} \right) - g(z) = f(y)? \quad (2)$$

Hasznos inverzek:

$$u = g(z) \Leftrightarrow z = h(u) = g^{-1}(u), \quad v = f(y) \Leftrightarrow y = e(v) = f^{-1}(v),$$

ezekkel (2) alapján nagy u mellett [Korrekciók \rightarrow]

$$h(u + v) \approx h(u) + h'(u)e(v). \quad (3)$$

Von Mises aszimptotika

Mivel csak azt használjuk ki, hogy $b_N \nearrow z^*$, azért egyelőre z -t írunk helyette, a kérdés tehát

$$\lim_{z \nearrow z^*} g\left(z + \frac{y}{g'(z)}\right) - g(z) = f(y)? \quad (2)$$

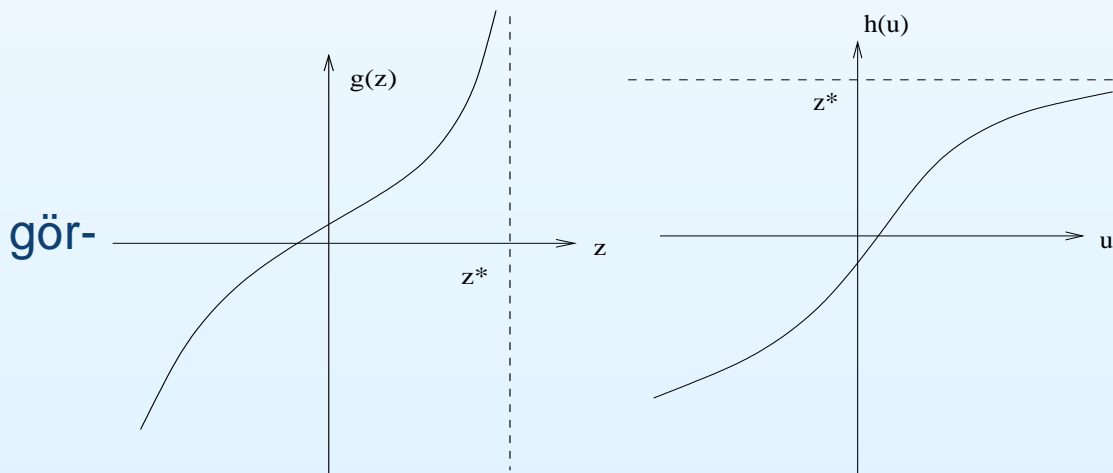
Hasznos inverzek:

$$u = g(z) \Leftrightarrow z = h(u) = g^{-1}(u), \quad v = f(y) \Leftrightarrow y = e(v) = f^{-1}(v),$$

ezekkel (2) alapján nagy u mellett [Korrekciók \rightarrow]

$$h(u + v) \approx h(u) + h'(u)e(v). \quad (3)$$

Tipikus
bék:



Von Mises aszimptotika

Mivel csak azt használjuk ki, hogy $b_N \nearrow z^*$, azért egyelőre z -t írunk helyette, a kérdés tehát

$$\lim_{z \nearrow z^*} g\left(z + \frac{y}{g'(z)}\right) - g(z) = f(y)? \quad (2)$$

Hasznos inverzek:

$$u = g(z) \Leftrightarrow z = h(u) = g^{-1}(u), \quad v = f(y) \Leftrightarrow y = e(v) = f^{-1}(v),$$

ezekkel (2) alapján nagy u mellett [Korrekciók \rightarrow]

$$h(u + v) \approx h(u) + h'(u)e(v). \quad (3)$$

Mindkét oldalt v szerint deriválva

$$h'(u + v) \approx h'(u)e'(v). \quad (4)$$

Tegyük fel, hogy $h''(u)/h'(u) \rightarrow \gamma$, midőn $u \rightarrow \infty$, ekkor L'Hôpital szabálya szerint $h^{[k+1]}(u)/h^{[k]}(u) \rightarrow \gamma$, ezért $h^{[k+1]}(u)/h'(u) \rightarrow \gamma^k$. Következésképp

$$h'(u + v)/h'(u) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} v^k \gamma^k / k! = e^{\gamma v} = e'(v) \Rightarrow e(v) = (e^{\gamma v} - 1)/\gamma$$

Von Mises aszimptotika

Mivel csak azt használjuk ki, hogy $b_N \nearrow z^*$, azért egyelőre z -t írunk helyette, a kérdés tehát

$$\lim_{z \nearrow z^*} g\left(z + \frac{y}{g'(z)}\right) - g(z) = f(y)? \quad (2)$$

Hasznos inverzek:

$$u = g(z) \Leftrightarrow z = h(u) = g^{-1}(u), \quad v = f(y) \Leftrightarrow y = e(v) = f^{-1}(v),$$

ezekkel (2) alapján nagy u mellett [Korrekciók \rightarrow]

$$h(u + v) \approx h(u) + h'(u)e(v). \quad (3)$$

Mindkét oldalt v szerint deriválva

$$h'(u + v) \approx h'(u)e'(v). \quad (4)$$



Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital (1661 - 1704): *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696). Megoldotta a brachisztokron problémát Newton, Leibnitz és a Bernouilliak mellett.

Az egyesített extrém eloszlás

Összegezve, ha az őseloszlásra fennáll ($u \rightarrow \infty$ azaz $z \nearrow z^*$ mellett)

$$h''(u)/h'(u) = -g''(z)/g'^2(z) \rightarrow \gamma, \quad (5)$$

Az egyesített extrém eloszlás

Összegezve, ha az őseloszlásra fennáll ($u \rightarrow \infty$ azaz $z \nearrow z^*$ mellett)

$$h''(u)/h'(u) = -g''(z)/g'(z)^2 \rightarrow \gamma, \quad (5)$$

akkor az extrém érték IPDF a korábbi **lineáris transzformációval**

$$M_N(y) \rightarrow M(y) = e^{-e^{-f(y)}}, \quad (6)$$

ahol

$$f(y) = e^{-1}(y) = \gamma^{-1} \ln(1 + \gamma y), \quad y > -1/\gamma \quad (7)$$

Az egyesített extrém eloszlás

Összegezve, ha az őseloszlásra fennáll ($u \rightarrow \infty$ azaz $z \nearrow z^*$ mellett)

$$h''(u)/h'(u) = -g''(z)/g'^2(z) \rightarrow \gamma, \quad (5)$$

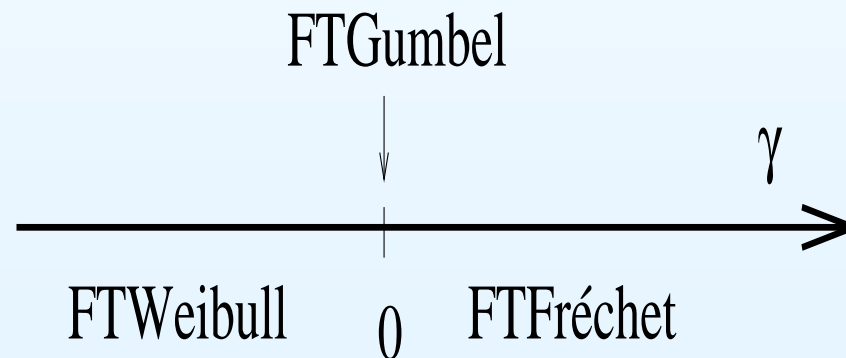
akkor az extrém érték IPDF a korábbi **lineáris transzformációval**

$$M_N(y) \rightarrow M(y) = e^{-e^{-f(y)}}, \quad (6)$$

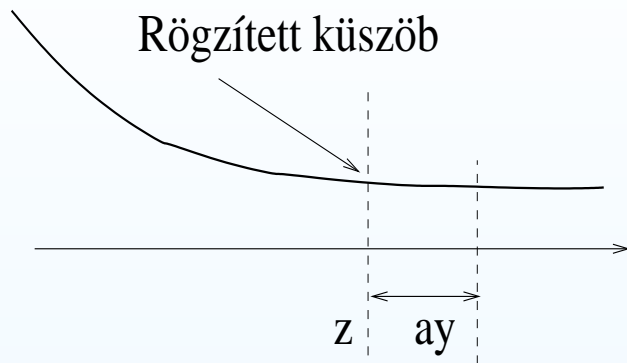
ahol

$$f(y) = e^{-1}(y) = \gamma^{-1} \ln(1 + \gamma y), \quad y > -1/\gamma \quad (7)$$

Ez éppen a korábban előállított egyesített IPDF. A hagyományos osztályok γ előjelével jellemezhetők:



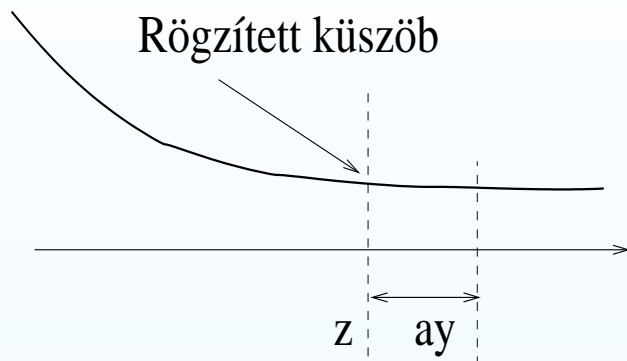
Pareto eloszlás



Milyen az eloszlás valamely nagy z küszöb fölötti értékekre?

$$M_z(y) = \frac{\mu(z + ay) - \mu(z)}{1 - \mu(z)} \quad (8)$$

Pareto eloszlás



Milyen az eloszlás valamely nagy z küszöb fölötti értékekre?

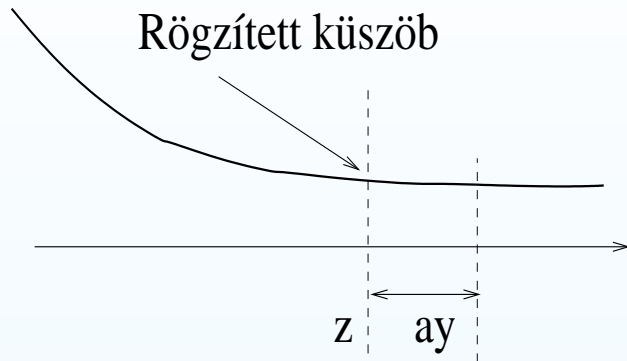
$$M_z(y) = \frac{\mu(z + ay) - \mu(z)}{1 - \mu(z)} \quad (8)$$

Ha

$\mu = e^{-e^{-g}} \approx 1 - e^{-g}$ és $a = 1/g'(z)$, akkor

$$M_z(y) \approx 1 - \exp(g(z) - g(z + ay)) \rightarrow 1 - e^{-f(y)} = \boxed{1 - (1 + \gamma y)^{-1/\gamma}}$$

Pareto eloszlás



Milyen az eloszlás valamely nagy z küszöb fölötti értékekre?

$$M_z(y) = \frac{\mu(z + ay) - \mu(z)}{1 - \mu(z)} \quad (8)$$

Ha

$\mu = e^{-e^{-g}} \approx 1 - e^{-g}$ és $a = 1/g'(z)$, akkor

$$M_z(y) \approx 1 - \exp(g(z) - g(z + ay)) \rightarrow 1 - e^{-f(y)} = \boxed{1 - (1 + \gamma y)^{-1/\gamma}}$$

A Pareto IPDF tehát kifejezhető az extrém IPDF-fel. Innen nyilvánvaló, hogy a Pareto osztályok az extrém osztályokkal azonosak. Az FTW és FTF hatvány Pareto eloszlást ad, míg az FTG-nek tiszta exponenciális felel meg. **NB: szűk értelemben csak hatvány esetén beszélnek Pareto eloszlásról.**

9. előadás

Emlékeztető

Az ősz-IPDF $\mu(z) = \exp(-\exp(-g(z)))$ s vizsgáljuk a maximum eloszlását a

$$z = b_N + a_N y$$

transzformációval bevezetett y változóban

$$M_N(y) = \mu^N(b_N + a_N y) = \exp(-N \exp(-g(b_N + a_N y)))$$

Legyen

$$g(b_N) = \ln N, \quad a_N = 1/g'(b_N).$$

Nyilván $b_N \nearrow z^*$. Írjuk vissza a b_N helyébe a z -t az egyszerűség kedvéért. Ekkor vizsgáljuk a $z \nearrow z^*$ limeszben

$$g\left(z + \frac{y}{g'(z)}\right) - g(z) \approx f(y) \quad (9)$$

Inverzek:

$$u = g(z) \Leftrightarrow z = h(u), \quad v = f(y) \Leftrightarrow y = e(v),$$

amelyekkel

$$h(u + v) \approx h(u) + h'(u)e(v) \quad (10)$$

Vezető korrekció az inverzben

Az inverz pontosabban. Jelölés ($u = \ln N$)

$$h_1(u) = h'(u), \quad e'_1(v) = e'(v) = e^{\gamma v}, \quad \gamma_1 = \gamma$$

és tegyük fel, hogy $h_1 \gg h_2$ etc. nagy u mellett

$$h(u + v) \approx h(u) + h_1(u)e_1(v) + h_2(u)e_2(v) + \dots \quad (11)$$

Vezető korrekció az inverzben

Az inverz pontosabban. Jelölés ($u = \ln N$)

$$h_1(u) = h'(u), \quad e'_1(v) = e'(v) = e^{\gamma v}, \quad \gamma_1 = \gamma$$

és tegyük fel, hogy $h_1 \gg h_2$ etc. nagy u mellett

$$h(u + v) \approx h(u) + h_1(u)e_1(v) + h_2(u)e_2(v) + \dots \quad (11)$$

Az elsőrendű tagot újraszámoljuk – deriválással elimináljuk a nulladikat

$$\frac{d}{dv} h(u + v) \approx h_1(u)e'_1(v)$$

Megkövetelhetjük, hogy $e'_1(0) = 1$, ekkor visszacapjuk az ismert

$$h'(u) = h_1(u)$$

relációt, és L'Hôpital szerint

$$\frac{h_1(u + v)}{h_1(u)} \rightarrow e^{\gamma_1 v} = e'_1(v), \quad \text{ahol } \frac{h'_1(u)}{h_1(u)} = \frac{h''(u)}{h'(u)} \rightarrow \gamma_1$$

Vezető korrekció az inverzben

Az inverz pontosabban. Jelölés ($u = \ln N$)

$$h_1(u) = h'(u), \quad e'_1(v) = e'(v) = e^{\gamma v}, \quad \gamma_1 = \gamma$$

és tegyük fel, hogy $h_1 \gg h_2$ etc. nagy u mellett

$$h(u + v) \approx h(u) + h_1(u)e_1(v) + h_2(u)e_2(v) + \dots \quad (11)$$

A második rend

$$\frac{d}{dv} h(u + v) = h_1(u + v) \approx h_1(u)e^{\gamma_1 v} + h_2(u)e'_2(v),$$

$$\frac{d}{dv} e^{-\gamma_1 v} h_1(u + v) \approx h_2(u) (e^{-\gamma_1 v} e'_2(v))'.$$

Vezető korrekció az inverzben

Az inverz pontosabban. Jelölés ($u = \ln N$)

$$h_1(u) = h'(u), \quad e'_1(v) = e'(v) = e^{\gamma v}, \quad \gamma_1 = \gamma$$

és tegyük fel, hogy $h_1 \gg h_2$ etc. nagy u mellett

$$h(u+v) \approx h(u) + h_1(u)e_1(v) + h_2(u)e_2(v) + \dots \quad (11)$$

A második rend

$$\frac{d}{dv}h(u+v) = h_1(u+v) \approx h_1(u)e^{\gamma_1 v} + h_2(u)e'_2(v),$$

$$\frac{d}{dv}e^{-\gamma_1 v}h_1(u+v) \approx h_2(u) \left(e^{-\gamma_1 v}e'_2(v) \right)'.$$

Megköveteljük, hogy $\left(e^{-\gamma_1 v}e'_2(v) \right)' \Big|_{v=0} = 1$, ekkor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}e^{-\gamma_1 v}h_1(u+v) \Big|_{v=0} &= h_2(u) \\ \Rightarrow e^{\gamma_1 u} \frac{d}{du}e^{-\gamma_1 u}h_1(u) &= \boxed{h'_1(u) - \gamma_1 h_1(u) = h_2(u)}. \end{aligned}$$

Vezető korrekció az inverzben

Az inverz pontosabban. Jelölés ($u = \ln N$)

$$h_1(u) = h'(u), \quad e'_1(v) = e'(v) = e^{\gamma v}, \quad \gamma_1 = \gamma$$

és tegyük fel, hogy $h_1 \gg h_2$ etc. nagy u mellett

$$h(u + v) \approx h(u) + h_1(u)e_1(v) + h_2(u)e_2(v) + \dots \quad (11)$$

A második rend

$$\frac{d}{dv} h(u + v) = h_1(u + v) \approx h_1(u)e^{\gamma_1 v} + h_2(u)e'_2(v),$$

$$\frac{d}{dv} e^{-\gamma_1 v} h_1(u + v) \approx h_2(u) (e^{-\gamma_1 v} e'_2(v))'.$$

$$e^{\gamma_1 v} \frac{d}{dv} e^{-\gamma_1 v} h_1(u + v) = h_2(u + v) = h_2(u) e^{\gamma_1 v} (e^{-\gamma_1 v} e'_2(v))'.$$

L'Hôpital szerint, a γ_2 -t bevezetve nyerjük

$$\frac{h_2(u + v)}{h_2(u)} \rightarrow e^{(\gamma_1 + \gamma_2)v} = e^{\gamma_1 v} (e^{-\gamma_1 v} e'_2(v))', \quad \text{ahol } \boxed{\frac{h'_2(u)}{h_2(u)} \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2}$$

Vezető korrekció az inverzben

Az inverz pontosabban. Jelölés ($u = \ln N$)

$$h_1(u) = h'(u), \quad e'_1(v) = e'(v) = e^{\gamma v}, \quad \gamma_1 = \gamma$$

és tegyük fel, hogy $h_1 \gg h_2$ etc. nagy u mellett

$$h(u+v) \approx h(u) + h_1(u)e_1(v) + h_2(u)e_2(v) + \dots \quad (11)$$

Összegezve (de Hahn–Resnick, 1996, Gomes–de Hahn, 1999)

$$h'(u) = h_1(u), \quad \frac{h'_1(u)}{h_1(u)} \rightarrow \gamma_1$$

$$e'_1(v) = e^{\gamma_1 v} \Rightarrow e_1(v) = \int_0^v e^{\gamma_1 v_1} dv_1$$

$$h'_1(u) - \gamma_1 h_1(u) = h_2(u), \quad \frac{h'_2(u)}{h_2(u)} \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$$

$$e^{\gamma_2 v} = (e^{-\gamma_1 v} e'_2(v))' \Rightarrow e_2(v) = \int_0^v e^{\gamma_1 v_1} \int_0^{v_1} e^{\gamma_2 v_2} dv_1 dv_2$$

Az inverz tetszőleges rendben

Az inverz sor alakban ($h_1(u) = h'(u)$, $e(v) = e_1(v)$)

$$h(u+v) = h(u) + h'(u)e(v) + \sum_{k=2}^{\infty} h_k(u)e_k(v) \quad (12)$$

$$h'_{k-1}(u) - \sum_{m=1}^{k-1} \gamma_m \cdot h_{k-1}(u) = h_k(u), \quad \frac{h'_k(u)}{h_k(u)} \rightarrow \sum_{m=1}^k \gamma_m$$

$$e_k(v) = \int_0^v e^{\gamma_1 v_1} \int_0^{v_1} e^{\gamma_2 v_2} \dots \int_0^{v_{k-1}} e^{\gamma_k v_k} dv_1 dv_2 \dots dv_k$$

A magasabb rendű tagok lassú konvergenciánál válnak jelentőssé! A fenti eredmény összegezhető

$$h(u+v) = h(u) + h'(u) [e(v) + \Delta(u, e(v))], \quad (13)$$

ahol Δ -t sor alakjában állítottuk elő, s később látható okból az $e(v)$ -t beledefiniáltuk.

$h(u) = g^{-1}(u)$ maga is sor alakú lehet! Pl. exponenciális őseloszlásnál ha $\mu(z) = 1 - e^{-z}$, akkor $g(z) = -\ln(-\ln \mu(z)) \approx z - e^{-z}/2$, s ezért a h sora így indul $h(u) \approx u + e^{-u}/2$. Mivel $u = \ln N$ azért ha magasabb rendig számolunk Δ -ban, akkor az alacsony rendű tagokat is pontosabban kell figyelembe venni.

Az EVS eloszlás korrekciói

Használjuk a korábban levezetett

$$h(u + v) = h(u) + h'(u) [e(v) + \Delta(u, e(v))] \quad (14)$$

melyben ismertnek tekintjük Δ -t. Konkrét célunk a

$$-\ln(-\ln M_N(y)) = g\left(z + \frac{y}{g'(z)}\right) - g(z) = f(y + \Psi(u, y)) \quad (15)$$

függvény meghatározása, ahol $g(z) = u = \ln N$. A $g(z) = u$ -t átvive a jobboldalra és alkalmazva a h -t visszakapjuk a fentebbi formulát, ha

$$v(u, y) = f(y + \Psi(u, y)), \quad y(u, v) = e(v) + \Delta(u, e(v)) \quad (16)$$

egyszerre teljesül. Lényegében a $v(u, y)$ -ra és inverzére, az $y(u, v)$ -re adunk ezzel ekvivalens feltételeket, amelyekből

$$e(v) = y + \Psi(u, y) = y - \Delta(u, e(v)) \quad (17)$$

ahonnan, az u -függést most hagyva

$$\Psi(y) = -\Delta(y + \Psi(y)) = -\Delta(y - \Delta(y - \Delta(y - \dots))) \quad (18)$$

Az EVS eloszlás korrekciói

Felidézzük, hogy $u = \ln N$ és $z = h(\ln N) = b_N$. Az EVS eloszlás

$$\begin{aligned}M_N(y) &= e^{-e^{-\left[g\left(z + \frac{y}{g'(z)}\right) - g(z)\right]}} = e^{-ef(y + \Psi(\ln N, y))} \\ &= M(y + \Psi(\ln N, y)) \\ &= M(y - \Delta_N(y - \Delta_N(y - \Delta_N(y - \dots))))\end{aligned}\tag{14}$$

ahol $\Delta_N(y) = \Delta(\ln N, y)$. A kis mennyiség a Δ_N függvény. Fejtsünk sorba ($P = M'$)

$$M_N(y) = M(y) - P(y)\Delta_N(y) + \frac{1}{2}P'(y)\Delta_N^2(y) + P(y)\Delta_N'(y)\Delta_N(y) \dots$$

A teljes sor

$$M_N(y) = M(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (P(y)\Delta_N^n(y))^{[n-1]}\tag{15}$$

1. Házi feladat. Vezessük le a fenti sort! Vegyük észre, hogy a Ψ kifejezése ennek speciális esete az $M = -\Delta_N$ azonosítással. (40%)

Példa: általánosított Gauss őseloszlás

Legyen $\rho(z) = Be^{-A|z|^r}$, ahol $1 \neq r > 0$. Ekkor $g(z) \approx Az^r$. Innen $h(u) \approx \sqrt[r]{u/A}$, és $h''(u)/h'(u) \rightarrow \gamma_1 = 0$, ezért $e_1(v) = v = e(v) = f^{-1}(v)$ – eddig is tudtuk, hogy az FTG osztályba tartozik. Továbbá

$$h_2(u) = h''(u) - \gamma_1 h'(u) = h''(u), \quad (16)$$

$$h'_2/h_2 = h'''/h'' \rightarrow \gamma_2 = 0. \quad (17)$$

Ezért $e_2(v) = v^2/2$ és vezető rendben

$$\Delta_N(y) \approx \frac{h_2(\ln N)}{h'(\ln N)} e_2(f(y)) \approx -\frac{(r-1)y^2}{2r \ln N}. \quad (18)$$

Innen

$$M_N(y) \approx M(y) + P(y)\Delta_N(y) \approx M(y) - P(y)\frac{(r-1)y^2}{2r \ln N} \quad (19)$$

A korrekció rendje nem, az amplitúdó viszont függ az őseloszlástól.

Példa: általánosított Gauss őseloszlás

Célszerű beállítani az átlagot zérusra és a varianciát 1-re. Ezzel a PDF a vezető korrekciója

$$P^{(1)}(x) = \frac{a(r-1)}{2r \ln N} P^{(0)}(x) \times \left[-\kappa + 2x + a(-1 - \kappa x + x^2) \left(e^{-(ax+\gamma)} - 1 \right) \right]. \quad (16)$$

ahol $a = \pi/\sqrt{6}$, γ az EM állandó, és $\kappa = 2\zeta(3)/a^3 = 1.139547099$.

2. Házi feladat. Határozzuk meg a vezető korrekciót exponenciális őseloszlásra, $\mu(z) = 1 - e^{-z}$. Vegyük észre, hogy nem elég $g(z)$ vezető rendjét használni.

Skálázzuk az eloszlást úgy, hogy az átlag eltűnjön és a szórás 1 legyen. (30%)

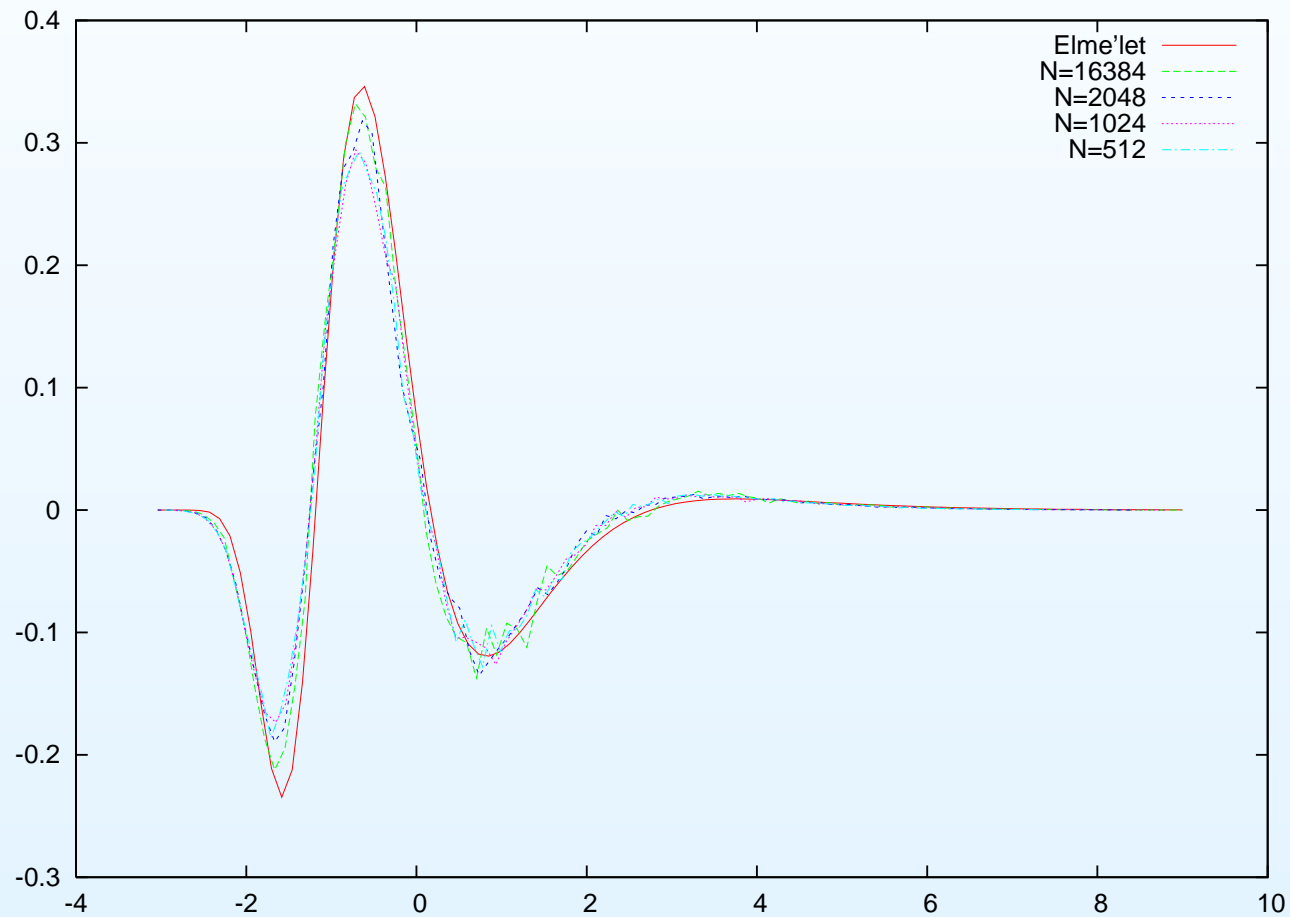
3. Házi feladat. Határozzuk meg a korrekció N -függését, ha az őseloszlás (i) $\mu(z) = 1 - e^{-z+e^{-az}-1}$ illetve nagy z -re (ii) $\mu(z) \approx 1 - z^s e^{-z}$ (iii) $\mu(z) = 1 - e^{-z+z^r}$.

Az egyes N függvényekhez korlátozott paraméter tartomány tartozhat, ezeket is adjuk meg. (3 x 10%) A PDF korrekciója nem része a feladatnak, de extra pontot lehet vele szerezni.

4. Házi feladat. Számítsuk ki az általánosított Gauss őseloszlás esetére az IPDF és a PDF második és harmadik korrekcióját. Teljesüljön harmadrendig $\langle x \rangle = 0$ és $\langle x^2 \rangle = 1$. Adjuk meg a ferdeség és a kurtózis korrekcióit. (90%)

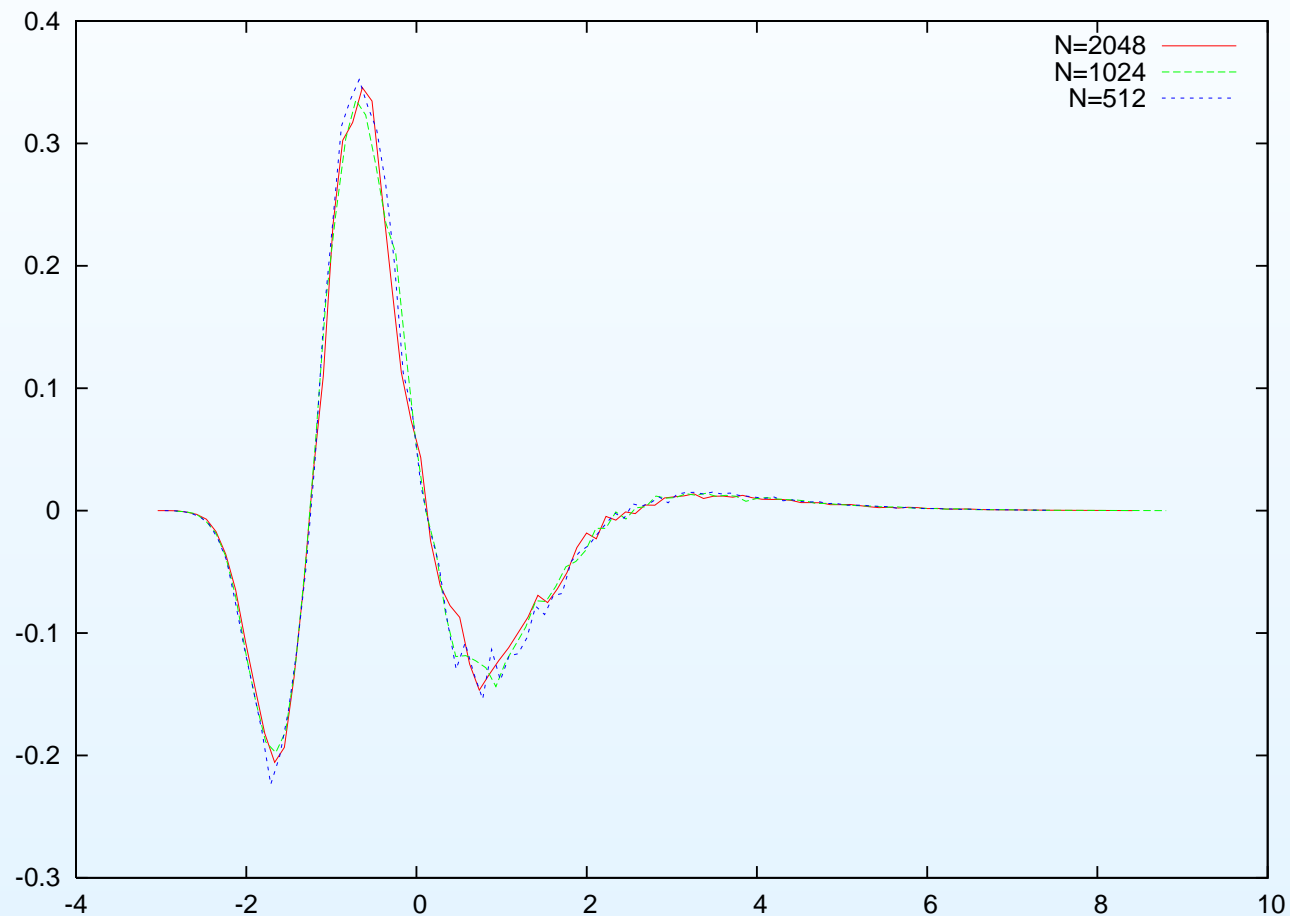
Példa: általánosított Gauss őseloszlás

Az $r = 2$ gaussi esetben az $\ln N$ -nel skálázott vezető korrekciót összehasonlítjuk Ozogány Katalin szimulációjával.



Példa: általánosított Gauss őseloszlás

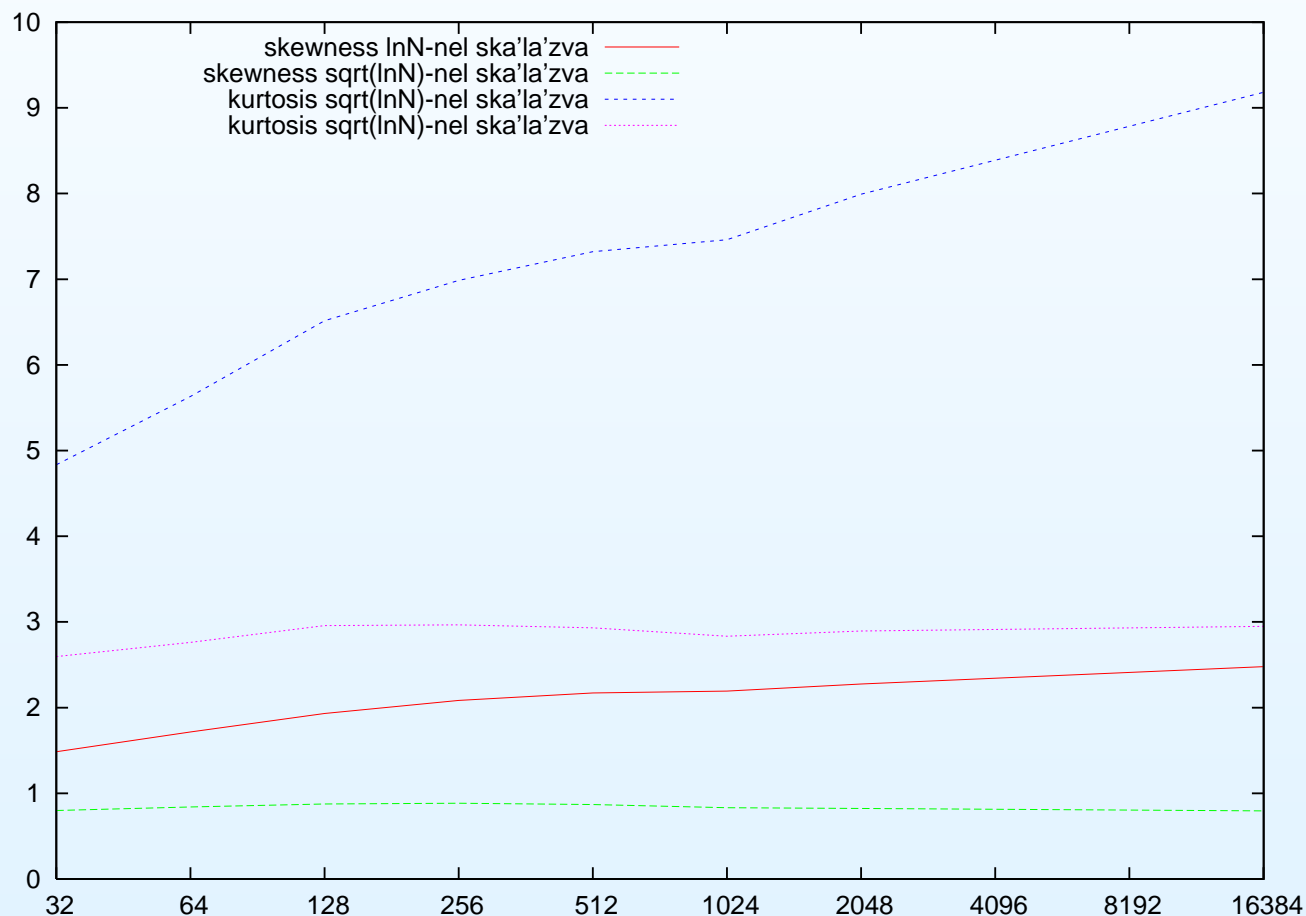
A numerika csapdái: Az $r = 2$ gaussi esetben $\sqrt{\ln N}$ -nel skálázott korekció



Példa: általánosított Gauss őseloszlás

Lassú konvergencia: a gaussi esetben a "skewness" (piros) és a "kurtosis" (kék) korrekciója $\ln N$ -nel skálázva.

A numerika csapdái: a $\sqrt{\ln N}$ -nel skálázott "skewness" (zöld) és a "kurtosis" (lila).



10. előadás

Véletlen felületek

Ezen előadás ábráit Nicholas Moloney készítette.

Példák fizikai alkalmazásra

- Epitaxiális réteg növesztés (magasság $h(\mathbf{x})$)
- Aggregáció ($h(\mathbf{x})$)
- Korrózió, maratás ($h(\mathbf{x})$)
- Feszültségzaj elektronikus készülékekben (sztochasztikus időjel $x(t)$)
- Környezeti adatsorok ingadozásai (hőmérséklet, vízszint, etc., idősor $x(t_n)$)
- Polimerek (a végétől s hosszra levő rész helye $r(s)$)

Az extremum jelentősége: folyamat maximális kitérése, felület magassága, korrózió mélysége ...

Véletlen felületek

Gauss felület 1+1 dimenzióban, periodikus határfeltétellel.

Véletlen bolyongás (Wiener folyamat)

$$h_{n+1} - h_n = \xi_n \Delta t \sim h'(t) = \sigma \xi(t),$$

ahol ξ fehér zaj

$$\mathcal{P}[\{\xi_n\}] \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \sum \xi_n^2 \Delta t\right] \sim \mathcal{P}[\xi(t)] \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \int \xi(t)^2 dt\right].$$

Korrelációk $\langle \xi_n \xi_m \rangle = \delta_{mn} / \Delta t$ ill. $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t')$. A $h(t)$ pálya eloszlása

$$\mathcal{P}[h(t)] \propto \exp[-S[h(t)]], \quad S = \frac{1}{2\sigma^2} \int h'(t)^2 dt \propto \sum n^2 |c_n|^2,$$

ahol c_n a $h(t)$ Fourier komponensei, ha a jel periodikus. Látható, $\Re c_n$ és $\Im c_n$ Gauss eloszlású, zérus átlaggal és $\propto 1/n^2$ varianciával. Átskálázzuk: $\mathcal{N}(0, 1/n^2)$.

A $n^\alpha \rightarrow n^2$ helyettesítéssel gaussi $1/f^\alpha$ zajt kapunk.

A c_n -ek mértéke polárkoordinátákban $|c_n| d|c_n| d\varphi$. A φ fázistól nem függ az eloszlás, arra gondolatban integrálhatunk. Áttérve az $u_n = |c_n|^2$ intenzitásra, ennek eloszlása exponenciális, $\rho(u_n) = n e^{-n u_n}$.

Véletlen felületek

Gauss felület 1+1 dimenzióban, periodikus határfeltétellel.

Véletlen bolyongás (Wiener folyamat)

$$h_{n+1} - h_n = \xi_n \Delta t \sim h'(t) = \sigma \xi(t),$$

ahol ξ fehér zaj

$$\mathcal{P}[\{\xi_n\}] \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \sum \xi_n^2 \Delta t\right] \sim \mathcal{P}[\xi(t)] \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \int \xi(t)^2 dt\right].$$

Korrelációk $\langle \xi_n \xi_m \rangle = \delta_{mn} / \Delta t$ ill. $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t')$. A $h(t)$ pálya eloszlása

$$\mathcal{P}[h(t)] \propto \exp[-S[h(t)]], \quad S = \frac{1}{2\sigma^2} \int h'(t)^2 dt \propto \sum n^2 |c_n|^2,$$

ahol c_n a $h(t)$ Fourier komponensei, ha a jel periodikus. Látható, $\Re c_n$ és $\Im c_n$ Gauss eloszlású, zérus átlaggal és $\propto 1/n^2$ varianciával. Átskálázzuk: $\mathcal{N}(0, 1/n^2)$.

A $n^\alpha \rightarrow n^2$ helyettesítéssel gaussi $1/f^\alpha$ zajt kapunk.

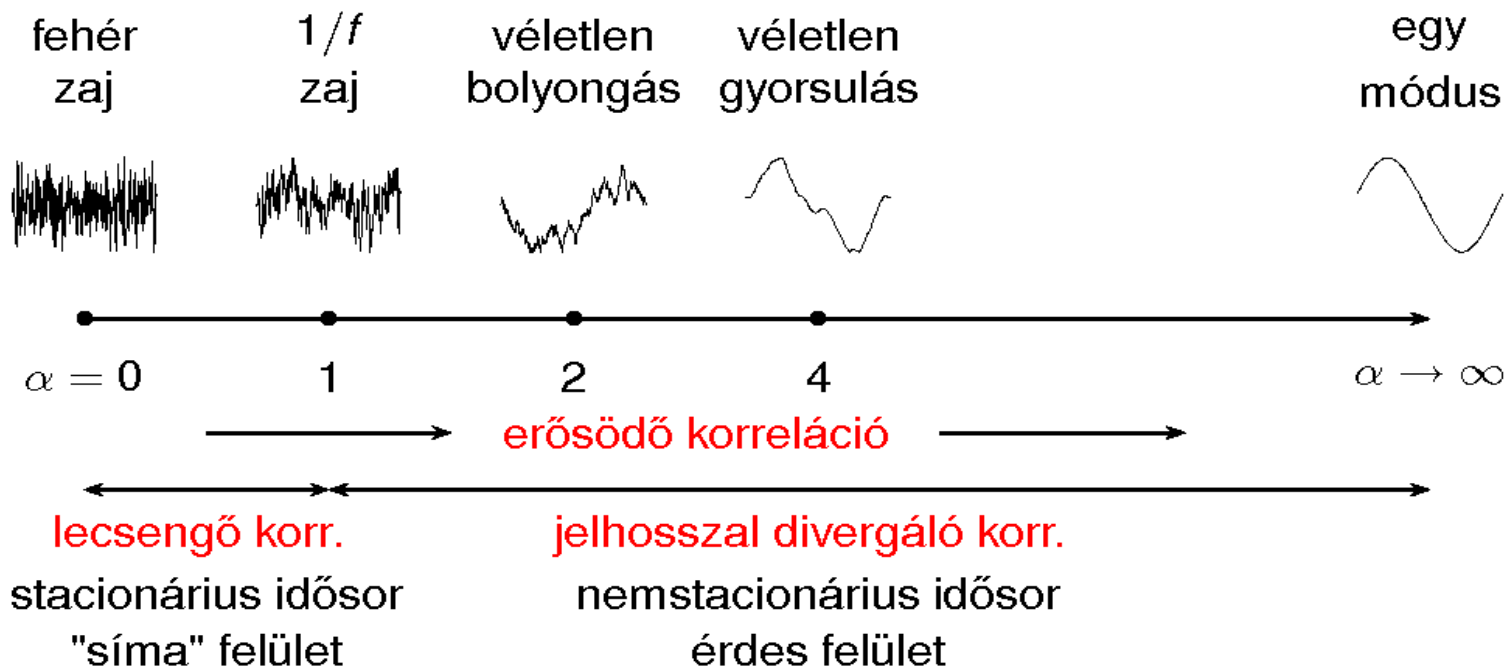
A felület "átlagos négyzetes vastagság"-a egyben az integrált teljesítményspektrum (itt $\overline{A(t)}$ időátlag),

$$w_2 = \overline{(h(t) - \overline{h(t)})^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Gaussi $1/f^\alpha$ zaj

Az időfüggvény és a véletlen paraméterek: a Fourier együtthatók normál eloszlásúak.

$$h(t) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right], \quad a_n, b_n : \mathcal{N}(0, n^{-\alpha})$$

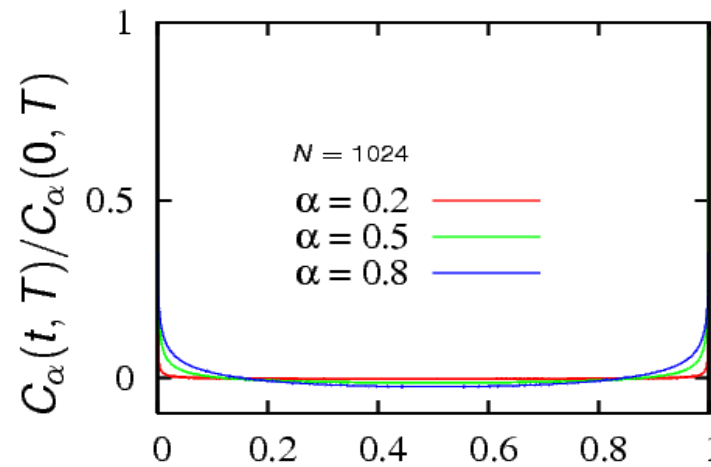
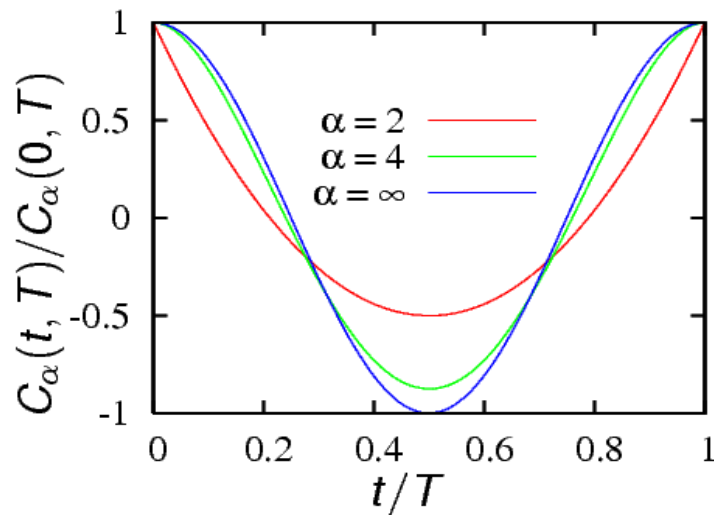


Gaussi $1/f^\alpha$ zaj

A korrelációs függvény:

$$C_\alpha(t, T) := \langle h(t_0)h(t_0 + t) \rangle = \frac{2T^{\alpha-1}}{(2\pi)^\alpha} \sum_{n=1}^{N/2} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)}{n^\alpha}$$

$\sim \begin{cases} T^{\alpha-1} \phi_\alpha(t/T) & \alpha > 1, T\text{-vel divergáló korreláció} \\ t^{\alpha-1} \psi_\alpha(t/T) & \alpha < 1, t\text{-ben lecsengő korreláció.} \end{cases}$



Az FTG eloszlás

Az $\alpha = 1$ esetben, ($1/f$ zaj), a "vastagság" eleget tesz az FTG eloszlásnak!

Az FTG eloszlás

Az $\alpha = 1$ esetben, ($1/f$ zaj), a "vastagság" eleget tesz az FTG eloszlásnak!

Bertin (2005): Az FTG extrém statisztika háttere, hogy a w_2 sora tekinthető a részletösszegek maximumának.

Az FTG eloszlás

Az $\alpha = 1$ esetben, $(1/f \text{ zaj})$, a "vastagság" eleget tesz az FTG eloszlásnak!

Ha az ős-PDF $\varrho(z)$, akkor az "order statistics"

$$P(z_1 > z_2 > \dots > z_N) = N! \prod_{i=1}^N \varrho(z_i) \prod_{i=1}^{N-1} \theta(z_i - z_{i+1}).$$

Vezessük be a nemnegatív különbség változókat

$$u_i = z_i - z_{i+1},$$

amelyek szimultán eloszlása (a változócsere Jacobi-ja 1)

$$P(u_1, u_2, \dots, u_N) = N! \prod_{i=1}^N \varrho \left(\sum_{n=i}^N u_n \right)$$

Az u_i -k általában korreláltak! Ha azonban $\varrho(z) = e^{-z}$, akkor függetlenek, noha különböző eloszlásúak

$$P(u_1, u_2, \dots, u_N) = N! \exp(-u_1 - 2u_2 \dots) = N! \exp \left(- \sum_{n=1}^N n u_n \right)$$

Az FTG eloszlás

Ha azonban $\varrho(z) = e^{-z}$, akkor függetlenek, noha különböző eloszlásúak

$$P(u_1, u_2, \dots, u_N) = N! \exp(-u_1 - 2u_2 \dots) = N! \exp\left(-\sum_{n=1}^N nu_n\right)$$

Eszerint exponenciális őseloszlás esetén a különbségváltozók korrelálatlanok, s az $1/f$ zaj intenzitásainak felelnek meg. Tehát nagy N -re

$$\sum_{n=1}^N u_n = z_1 = \max(z_1, \dots, z_N)$$

eloszlása FTG.

Azonnal következik, hogy

$$\sum_{n=k}^N u_n = z_k$$

pedig a k -adik maximum eloszlásának engedelmeskedik.

Az FTG eloszlás

Eszerint exponenciális őseloszlás esetén a különbségváltozók korrelálatlanok, s az $1/f$ zaj intenzitásainak felelnek meg. Tehát nagy N -re

$$\sum_{n=1}^N u_n = z_1 = \max(z_1, \dots, z_N)$$

eloszlása FTG.

Azonnal következik, hogy

$$\sum_{n=k}^N u_n = z_k$$

pedig a k -adik maximum eloszlásának engedelmeskedik.

Általában, ha

$$\mathcal{P}[h(t)] \propto \exp[-S[h(t)]], \quad S \propto \sum_{n=1}^N (n+k-1)|c_n|^2,$$

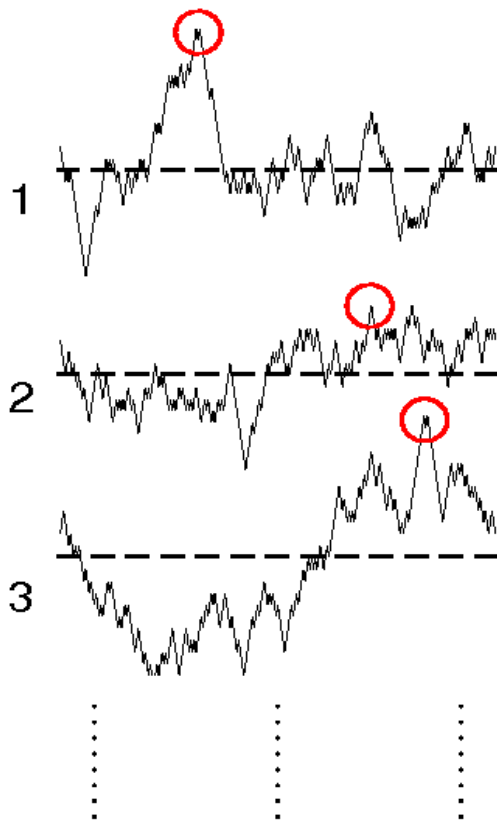
akkor skálázás erejéig w_2 eloszlása $P(w_2) \sim \left(e^{-y-e^{-y}}\right)^k$. Itt k paraméter, a formula valós k -ra is érvényes! Ez az $1/(f+f_0)$ zajnak felel meg.

Maximum eloszlás

A jel csúcsa mint valószínűségi változó: Az MRH-t az időátlagtól mérjük.

Maximum relative height (MRH) statisztika

Raychaudhuri *et al.* 2001

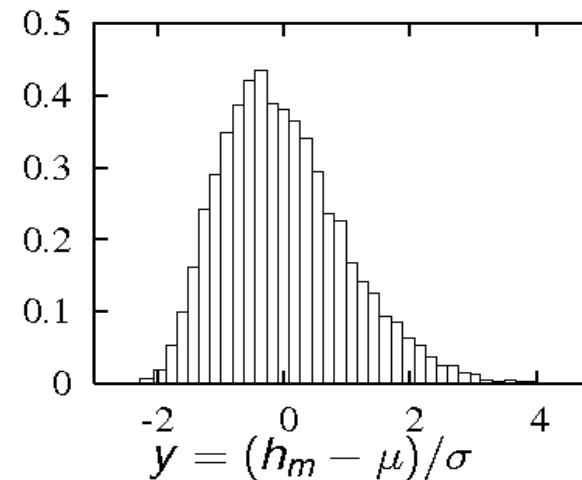


időátlag: $\overline{h(t)}$

$$h_m := \max_t h(t) - \overline{h(t)}$$

hisztogram

$p(y)$



sokaság átlag: $\langle _ \rangle$

$$\mu = \langle h_m \rangle$$
$$\sigma^2 = \langle h_m^2 \rangle - \mu^2$$

EVS számítás pályaintegrál módszerrel

Az alábbiakban Majumdar és Comtet (2004-2005) eredményeit foglalom össze. Csak a főbb képleteket tüntettem fel, a magyarázatot az előadáson szóban fűzöm hozzájuk. A fejezet nem kötelező része a vizsgaanyagnak, tudása külön előnynek számít.

EVS számítás pályaintegrál módszerrel

$$\begin{aligned} M(h_m; T) &= \int_{-\infty}^{h_m} dh P(h; T) \\ &= \int_{\text{PBC}} \mathcal{D}h(t) P[h(t)] \prod_t \theta(h_m - h(t)). \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} M(h_m; T) &= \int_{\text{PBC}} \mathcal{D}h(t) P[h_m - h(t)] \prod_t \theta(h(t)) \\ &= \int_{\text{PBC}} \mathcal{D}h(t) P[h_m - h(t)] e^{-\int_0^T dt V_0(h(t))}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} M(h_m; T) &= \mathcal{A} \int_{\text{PBC}} \mathcal{D}h(t) \delta \left(h_m T - \int_0^T dt h(t) \right) \\ &\times \exp \left[- \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2} h'(t)^2 + V_0(h(t)) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

EVS számítás pályaintegrál módszerrel

$$\begin{aligned} K(u; T) &= T \int_0^\infty dh_m e^{-uh_m T} M(h_m; T) \\ &= \mathcal{A} \int_{\text{PBC}} \mathcal{D}h(t) \\ &\times \exp \left[- \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2} h'(t)^2 + uV(h(t)) \right\} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\partial_t P = -\hat{H}(u)P, \quad (17)$$

$$\hat{H}(u) = -\frac{1}{2}\partial_z^2 + uV(z), \quad (18)$$

$$K(u; T) = \mathcal{A} \text{Tr} \exp \left(-\hat{H}(u)T \right). \quad (19)$$

EVS számítás pályaintegrál módszerrel

$$\hat{H}(u)\psi = \left[-\frac{1}{2}\partial_z^2 + uz \right] \psi = E(u)\psi \quad (16)$$

$$u^\beta z \rightarrow z, \quad u^\delta E \rightarrow E. \quad (17)$$

$$-2\beta = \beta + 1 = \delta \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{3}, \quad \delta = \frac{2}{3} \quad (18)$$

$E_k(u) = \epsilon_k u^{\frac{2}{3}}$, ahol $\epsilon_k = \alpha_k / \sqrt[3]{2}$ a $\hat{H} = \hat{H}(1)$ spektruma, α_k -k a pozitív Airy-zérók.

EVS számítás pályaintegrál módszerrel

$$K(u; T) = T^{\frac{3}{2}} K(uT^{\frac{3}{2}}) \quad (16)$$

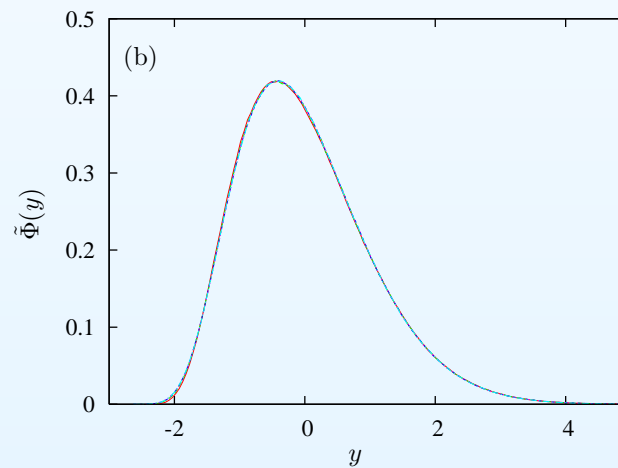
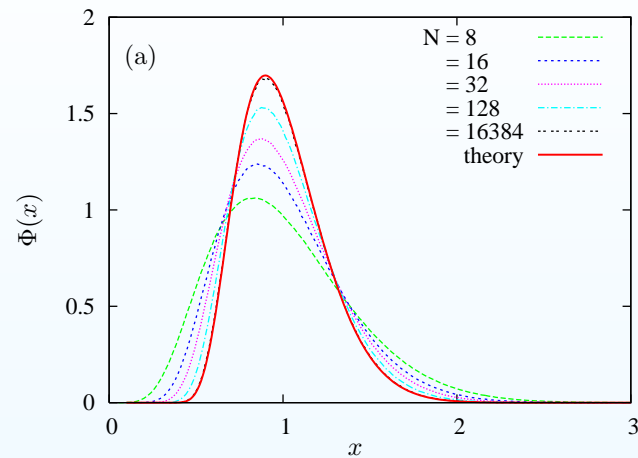
$$\begin{aligned} K(s) &= \sqrt{2\pi} \operatorname{Tr} \exp\left(-\hat{H} s^{\frac{2}{3}}\right) \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_k \exp\left(-\epsilon_k s^{\frac{2}{3}}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

$$P(h_m; T) = \partial_{h_m} M(h_m; T) = T^{-\frac{1}{2}} P(h_m T^{-\frac{1}{2}}), \quad (18)$$

$$G(v; T) = \int_0^\infty dh_m P(h_m; T) e^{-vh_m} = G(vT^{\frac{1}{2}}), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty dz P(z) e^{-sz} \\ &= s K(s) \\ &= \sqrt{2\pi} s \operatorname{Tr} \exp\left(-\hat{H} s^{\frac{2}{3}}\right) \\ &= \sqrt{2\pi} s \sum_k \exp\left(-\epsilon_k s^{\frac{2}{3}}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

EVS számítás pályaintegrál módszerrel



A PDF kétfajta skálázással,
szimulációból, és az Airy sűrűségfüggvény.

Konklúzió

Nem exponenciális őseloszlás esetén a különbség változók korreláltak. Megfordítva, nem exponenciális különbség változók esetén a szimultán őseloszlás nem bomlik fel i.i.d. változókéra.

Az EVS látszólag más eredetű statisztikában jelent meg!

Közvetlen EVS probléma: Felület maximumának eloszlása – minden felület maximuma más, felületek sokaságán eloszlás definiálható.

Majumdar, Comtet (2004-): Az $\alpha = 2$ esetben (véletlen bolyongás) a maximum eloszlásának számítása kvantummechanikai problémára képezhető.

Eredmény: un. Airy-eloszlás. Végesméret korrekció az eloszlás deriváltjával arányos.

Az MRH eloszlása megegyezik a "Brown-kirándulás" terület eloszlásával!