UNIVERSITÉ DE GENÈVE FACULTÉ DES SCIENCES
Section de Physique Prof. M. Droz

Invariance d'échelle, phénomènes critiques et groupe de renormalisation – Série 6

27 mai 2009

Exercice 6.1 : Calcul de l'énergie libre par renormalisation

Si on a un hamiltonien effectif $H(J)$ qui se transforme sous l'opération du groupe de renormalisation comme $H(J) \to H'(J') = H(J') + N\tilde{C}(J)$, on trouve que la densité d'énergie libre f peut s'exprimer sous la forme :

$$f(J) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-nd}\,\tilde{C}(J^{(n)}) + \lim_{n\to\infty} b^{-nd} f(J^{(n)})$$

où $J^{(n)}$ est la valeur de la constante de couplage après n itérations du groupe de renormalisation. Montrer que :

$$\tilde{C}(J) = \frac{1}{2}C' - C$$

où NC est le terme constant apparaissant dans l'hamiltonien avant renormalisation, et C' est le transformé de C. On considère dans la suite de l'exercice une chaîne de spins d'Ising en champ nul. Dans ce cas, on peut déterminer $\tilde{C}(J)$ à partir des relations de récurrence obtenues par décimation avec $b = 2$ (cf. exercice 2 de la série 5). Montrer que $\tilde{C}$ s'exprime comme :

$$\tilde{C}(J^{(n)}) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln\left(\cosh 2J^{(n)}\right)$$

On sait que la relation de récurrence pour $J^{(n)}$ peut s'exprimer sous la forme

$$\tanh J^{(n)} = \tanh^2 J^{(n-1)}$$

En déduire que

$$\tanh J^{(n)} = \tanh^{2^n} J$$

Montrer que la densité d'énergie libre vaut

$$\begin{aligned} f(J) &= \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} \ln\left(\frac{1+\tanh^{2^{n+1}} J}{1-\tanh^{2^{n+1}} J}\right) \qquad (1)\\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\tanh^2 J)^{(2l+1)2^n}}{2^n(2l+1)} \end{aligned}$$

<u>Indications</u> : on rappelle la relation

$$\cosh(2x) = \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}$$

ainsi que les développements en série suivants

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}x^m}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \\ &= 2\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{2l+1} \end{aligned}$$

Puisque la décomposition d'un entier en termes de facteurs premiers est unique, chaque entier p ($\geqslant 1$) peut s'exprimer comme le produit d'un nombre impair $(2q+1)$ ($q \geqslant 0$) et d'une puissance de deux 2^r ($r \geqslant 0$) avec p et r uniques. Or, la somme du membre de droite de l'équation (1) contient un seul terme en $(\tanh^2 J)^m$, avec un préfacteur $1/m$, pour chaque $m \geqslant 1$. On peut donc écrire :

$$f(J) = \ln 2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\tanh^2 J)^m}{m}$$

Montrer alors que l'on retrouve bien l'expression exacte de la densité d'énergie libre de la chaine d'Ising :

$$f(J) = \ln(2\cosh J)$$

Exercice 6.2 : Méthode des cumulants sur réseau triangulaire

On considère un modèle d'Ising sur un réseau triangulaire (voir figure 3.9, page 97 du cours). La procédure de renormalisation pour ce système consiste à remplacer des cellules de trois spins s_j^1, s_j^2, et s_j^3 par des nouveaux spins d'Ising σ_j, en utilisant la règle de la majorité et la méthode des cumulants (voir Th. Niemeyer et J. van Leeuwen, *Physica* **71**, 17 (1974)). On introduit des variables auxiliaires ξ_j ($= 0, 1, 2$ ou 3) associées aux sites du réseau renormalisé. Soit

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \mathrm{Sign}(s_j^1 + s_j^2 + s_j^3) \\ \xi_j &= \begin{cases} 0 & \text{pour} s_j^1 = s_j^2 = s_j^3 = \sigma_j \\ \mu & \text{pour} s_j^\mu = -\sigma_j, s_j^\nu = \sigma_j \ (\nu \neq \mu) \end{cases} \end{aligned}$$

Chacune des 8 valeurs de (σ_j, ξ_j) correspond à une configuration unique de (s_j^1, s_j^2, s_j^3). On peut donc écrire l'hamiltonien effectif $H(\{s\})$ en termes de ces nouvelles variables, soit $\bar{H}(\{\sigma, \xi\}) = H(\{s\})$. L'hamiltonien renormalisé s'exprime donc sous la forme

$$H'(\{\sigma\}) = \log[\mathrm{Tr}_{\{\xi\}} \exp(\bar{H}(\{\sigma, \xi\}))]$$

Soit $\bar{H} = \bar{H}_0 + V$, où $\bar{H}_0$ contient uniquement les interactions *intra-cellulaires* (c.-à-d. $\bar{H}_0 = K\sum_j(s_j^1 s_j^2 + s_j^2 s_j^3 + s_j^1 s_j^3)$, où K est le couplage entre plus proches voisins) et V les interactions *inter-cellulaires*. On trouve donc

$$H'(\{\sigma\}) = H_0' + \log\langle \exp(V)\rangle_0$$

où

$$\begin{aligned} H_0' &= \log \mathrm{Tr}_{\{\xi\}} \exp \bar{H}_0(\{\sigma, \xi\}) \\ \langle A\rangle_0 &\equiv \frac{\mathrm{Tr}_{\{\xi\}} A \exp \bar{H}_0}{\mathrm{Tr}_{\{\xi\}} \exp \bar{H}_0} \end{aligned}$$

(i) Montrer que

$$\bar{H}_0 \equiv \sum_j \bar{H}_{0j} = K\sum_j \left(-1 + 4\delta_{\xi_j,0}\right)$$

où $\delta_{\alpha,\beta}$ est la fonction de Kroenecker.

(ii) En déduire que :

$$\exp H_0' = \prod_j \sum_\xi \exp \bar{H}_{0j}(\xi_j) = (z_0)^{N/3}$$

où $z_0 \equiv e^{3K} + 3e^{-K}$, et N est le nombre de spins. La renormalisation du terme $\bar{H}_0$ donne ainsi un terme constant, indépendant des spins renormalisés $\{\sigma_j\}$.

(iii) En faisant un développement au premier ordre, on peut écrire :

$$\log\langle \exp V\rangle_0 = \langle V\rangle_0 + \mathcal{O}\left((V - \langle V\rangle_0)^2\right)$$

On considère un Hamiltonien avec des interactions entre plus proches voisins K uniquement. On trouve que la renormalisation ne produit pas d'autres couplages, au premier ordre. Le terme V s'écrit alors comme une somme sur les liens entre cellules : $V = \sum_{<i,j>} V_{ij}$. L'interaction V_{ij} entre deux cellules i et j vaut :

$$V_{ij} = K(s_i^2 + s_i^3)s_j^1$$

(les indices 1, 2 et 3 peuvent être permutés). Autrement dit, un sommet du triangle j interagit avec un côté du triangle i (voir figure 3.9 du cours). On a donc $\langle V\rangle_0 = \sum_{\langle ij\rangle}\langle V_{ij}\rangle_0$. Soit $f_1 \equiv \sigma_i\langle s_i^\mu\rangle_0$. Montrer que

$$f_1 = (e^{3K} + e^{-K})/z_0$$

et que

$$\langle V_{ij}\rangle_0 = 2f_1^2 K\sigma_i\sigma_j$$

Ceci est la seule contribution en $\sigma_i\sigma_j$ à cet ordre, donc on a

$$K' = 2f_1^2 K \qquad \text{(premier ordre).}$$

(iv) Trouver les points fixes de cette équation, et montrer que la valeur propre associée à la température au point fixe non trivial $K^\star$ vaut

$$\lambda_T \equiv \left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K=K^\star} = 1 + \frac{1}{2}(8 - 5\sqrt{2})\,\ln(1 + 2\sqrt{2}) \approx 1.624.$$

L'exposant y_T associé est défini par $\lambda_T = b^{y_T}$, où $b = \sqrt{3}$ est le facteur d'échelle. Calculer y_T et en déduire l'exposant usuel $\nu = 1/y_T$. Comparer avec la valeur exacte $\nu = 1$ du modèle d'Ising bidimensionnel, ainsi qu'avec la valeur de champ moyen $\nu = \frac{1}{2}$.

Exercice 6.3 : Transformation de Migdal-Kadanoff

La transformation symétrique de Migdal-Kadanoff en champ nul a été appliquée dans le cours au cas du modèle d'Ising bidimensionnel, avec un facteur d'échelle $b = 2$. Cette transformation de renormalisation conduit dans ce cas à la relation de récurrence suivante pour la constante de couplage J :

$$J' = \mathrm{Arcth}\,(\tanh(2J))^2$$

(i) En utilisant le principe général de cette transformation exposé dans le cours, montrer que pour un modèle d'Ising en champ nul de dimension d quelconque, et avec un facteur d'échelle $b \geqslant 2$ (entier) arbitraire, la relation précédente se généralise sous la forme :

$$J' = \mathrm{Arcth}\left(\tanh(b^{d-1}J)\right)^b \tag{2}$$

Indication : en champ nul, la décimation du modèle d'Ising unidimensionnel pour un facteur d'échelle b arbitraire conduit à la relation de récurrence

$$\tanh J' = (\tanh J)^b$$

(ii) En considérant maintenant b comme un nombre réel dans l'équation (2), prendre la limite $b \to 1$ en posant $b = 1 + \delta l$, et montrer que :

$$\frac{dJ}{dl} = (d-1)J + \frac{1}{2}\sinh(2J)\,\ln[\tanh(J)] \equiv \beta(J;d)$$

On rappelle les dérivées des fonctions hyperboliques

$$\frac{d}{dx}\tanh x = 1 - (\tanh x)^2, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{Arcth}\, x = \frac{1}{1-x^2}$$

ainsi que la relation :

$$\sinh(2x) = 2\sinh x\,\cosh x$$

(iii) Le point fixe critique est donné par la solution non triviale (non nulle et non infinie) de l'équation $dJ/dl = 0$. Dans le cas de la dimension $d = 2$, ce point fixe critique J^* peut être calculé exactement. Ecrire l'équation à résoudre dans ce cas, puis déterminer J^* en commençant par résoudre l'équation auxiliaire suivante :

$$-2x = \ln(\tanh x)$$

(iv) Illustrer graphiquement $\beta(J;d)$ en fonction de J pour quelques $d = 1, 2, ..$ et expliquer les conséquences physiques du comportement des courbes.