Invariance d'échelle, phénomènes critiques et groupe de renormalisation – Série 5

13 mai 2009

Exercice 1. Modèle des blocs de Kadanoff

On considère le modèle des blocs de Kadanoff en champ nul ($h = 0$), et on souhaite déterminer le comportement à grande distance de la fonction de corrélation réduite à deux spins $\Gamma(r, t)$. Pour cela, on commence par relier le comportement de la fonction de corrélation $\Gamma_2(|\vec{r_I} - \vec{r_J}|, t)$ du modèle de blocs, à la fonction initiale (avant la formation des blocs) $\Gamma_2(|\vec{r_i} - \vec{r_j}|, t)$.

En utilisant les résultats du cours ($t_b = b^x t$, $M \sim b^y$), montrer que :

$$\Gamma_2(|\vec{r_I} - \vec{r_J}|, t_b) \approx b^{-2y} \sum_{i\in I,\, j\in J} \Gamma_2(|\vec{r_i} - \vec{r_j}|, t)$$

où l'on suppose que le système est invariant par translation. En conclure que le comportement de $\Gamma_2(r, t)$ pour $r \gg a$ est donné par :

$$\Gamma_2(r, t) \approx \left(\frac{r}{a}\right)^{2(y-d)} \psi(r/\xi)$$

et déterminer l'expression de ξ en fonction de la température réduite t.

Exercice 2. Décimation de la chaîne d'Ising

On considère un modèle d'Ising unidimensionnel (chaîne d'Ising) en présence d'un champ extérieur, défini par l'hamiltonien effectif :

$$H = \sum_i (JS_iS_{i+1} + LS_i + C)$$

On souhaite renormaliser ce modèle en appliquant la procédure de décimation présentée dans le cours.

(i) Montrer que l'on peut écrire H sous la forme :

$$H = \sum_{i\,\text{pair}} \tilde{H}(S_i, S_{i+1}, S_{i+2})$$

avec
$$\tilde{H}(S_i, S_{i+1}, S_{i+2}) = JS_{i+1}(S_i + S_{i+2}) + \frac{L}{2}(S_i + 2S_{i+1} + S_{i+2}) + 2C$$

(ii) L'hamiltonien effectif renormalisé H' est obtenu en prenant la trace sur tous les spins aux sites impairs :

$$e^{H'} \equiv \sum_{\{S_j\},\ j\ \text{impair}} e^H$$

La fonction de partition est alors conservée dans la procédure de renormalisation :

$$Z = \sum_{\{S_j\}} e^{H(\{S_i\})} = \sum_{\{S_j\},\ j\ \text{pair}} e^{H'(\{S_i\})}$$

En introduisant les constantes de couplages renormalisées J', L' et C', l'hamiltonien H' s'écrit :

$$H' = \sum_{i \,\text{pair}} \left(J' S_i S_{i+2} + \frac{L'}{2}(S_i + S_{i+2}) + C' \right)$$

En déduire la relation suivante, valable pour tout indice i pair :

$$\exp\left(J' S_i S_{i+2} + \frac{L'}{2}(S_i + S_{i+2}) + C' \right) = \sum_{S_{i+1}=\pm 1} \exp \tilde{H}(S_i, S_{i+1}, S_{i+2})$$

(iii) En introduisant les notations :

$$\omega = e^{-4C} \qquad x = e^{-4J} \qquad y = e^{-2L}$$

établir les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{\omega^2 x y^2}{(1+y)^2 (x+y)(1+xy)} \\ x' &= \frac{x(1+y)^2}{(x+y)(1+xy)} \\ y' &= \frac{y(x+y)}{1+xy} \end{aligned}$$

(iv) Retrouver les différents points fixes énoncés dans le cours.