Invariance d'échelle, phénomènes critiques et groupe de renormalisation – Série 3

1 avril 2009

Exercice 1. Modèle d'Ising $S = 1$ et modèle de Potts

On considère un modèle de spin classique $S = 1$ d'hamiltonien :

$$H_1 = -J \sum_{<i,j>} s_i s_j - K \sum_{<i,j>} s_i^2 s_j^2 + D \sum_i s_i^2 \tag{1}$$

avec $s_i = -1, 0$ ou 1 ; la somme $\sum_{<i,j>}$ porte sur tous les liens du réseau (chaque lien est compté une seule fois). Montrer que dans le cas où $K = 3J$ et $D = 2zJ$, où z est le nombre de coordination du réseau, le modèle ci-dessus peut s'écrire comme un modèle de Potts à trois états, d'hamiltonien :

$$H_3 = -\bar{J} \sum_{<i,j>} \left[\delta_{s_i,s_j} - 1\right] \tag{2}$$

où

$$\delta_{s_i,s_j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s_i = s_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$

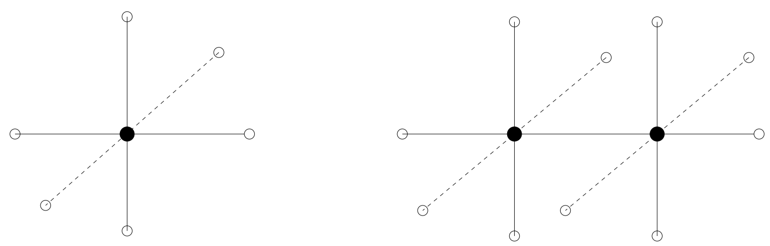
<u>Indication</u> : écrire δ_{s_i,s_j} comme un polynôme de ses variables.

Exercice 2. Aimantation d'un amas de spins

On s'intéresse à de petits réseaux d'Ising "hypercubiques" en dimension d, avec interaction ferromagnetique entre plus proches voisins. Considérer un amas de M spins en interaction (on se limitera à $M = 1, 2$). Les spins plus proches voisins de l'amas, représentés sur la figure ci-dessous en dimension $d = 3$, génèrent un champ effectif b dans l'amas. L'hamiltonien effectif de l'amas est donc :

$$H = -J {\sum_{<i,j>}}' s_i s_j - b \sum_{i=1}^{M} s_i \tag{4}$$

où $\sum'_{<i,j>}$ est la somme réduite aux paires de sites plus proches voisins appartenant à l'amas de taille M.



Les amas de tailles $M = 1$ et $M = 2$ sont schématisés sur la figure ci-dessus. Les symboles $\circ$ représentent les sites voisins dont l'influence est traduite par le champ effectif b.

Calculer dans l'ensemble canonique l'aimantation par spin $m(J,T,b)$ dans les deux cas ($M = 1, 2$), pour une dimension d quelconque de l'espace. Ce modèle élémentaire sera utilisé par la suite dans des calculs de renormalisation.

Exercice 3. Transformation de Hubbard-Stratonovich

On considère un modèle d'Ising d'hamiltonien (en dimension arbitraire) :

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \sum_i s_i h_i$$

où les constantes d'interaction J_{ij} sont positives (la somme porte sur toutes les paires de sites du réseau, donc un grand nombre de J_{ij} peuvent être nuls). La fonction de partition canonique s'écrit :

$$Z = \sum_{\{s_i=\pm 1\}} \exp\left[\sum_{i,j} K_{ij} s_i s_j + \sum_i H_i s_i\right]$$

avec $K_{ij} = \beta J_{ij}$ et $H_i = \beta h_i$

(i) Montrer en utilisant une transformation de Hubbard-Stratonovich que la fonction de partition peut s'écrire comme une intégrale multiple sur des variables continues (que l'on appelle parfois intégrale fonctionnelle).

<u>Indications :</u>

Il est facile de montrer l'identité suivante (dite de Hubbard-Stratonovich) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2} + sx\right] = C^{ste}.\exp(a^2 s^2)$$

Cette égalité se généralise pour toute matrice $\mathcal{V}$, symétrique et définie positive $\mathcal{V} = \{V_{ij}\}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} dx_i \, \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{i,j} x_i V_{ij}^{-1} x_j + \sum_i s_i x_i\right] = C^{ste}.\exp(\sum_{i,j} s_i V_{ij} s_j)$$

Faire une transformation sur Z, en introduisant une intégration sur des variables x_i grâce à la relation de Hubbard-Stratonovitch, puis faire un changement de variable simple $x_i \to \phi_i$ pour faire sortir de l'intégrale un terme quadratique en H_i.

(ii) Effectuer le changement de variable : $\psi_i = \frac{1}{2}\sum_j K_{ij}^{-1}\phi_j$, et montrer que l'on obtient :

$$\begin{aligned} Z \;\; \propto \;\; & \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{i,j} H_i K_{ij}^{-1} H_j\right) \times \\ & \int \prod_i d\psi_i \, \exp\left[-\sum_{i,j} \psi_i K_{ij} \psi_j + \sum_i H_i \psi_i + \sum_i \ln\left(\cosh(2\sum_j K_{ij}\psi_j)\right)\right] \end{aligned}$$

(iii) Comparer ce résultat à la théorie de Ginzburg-Landau. Pour cela, on pourra développer le terme $\ln\left(\cosh(2\sum_j K_{ij}\psi_j)\right)$ en série et ne retenir que les termes de plus bas ordres.

<u>Indication :</u> $\ln(\cosh x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$.

D'autre part, dans le cas particulier de la dimension $d = 1$, et des interactions aux plus proches voisins, réécrire le terme $\sum_{i,j} \psi_i K_{ij} \psi_j$ pour faire apparaitre un terme $\sum_i (\psi_i - \psi_{i-1})^2$.