Invariance d'échelle, phénomènes critiques et groupe de renormalisation – Série 2

18 mars 2009

Exercice 1. Comportement asymptotique d'une fonction

L'exposant μ caractérisant le comportement asymptotique d'une fonction $f(x)$ pour $x \to 0^+$ est défini par :

$$\mu = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log|f(x)|}{\log x} \tag{1}$$

(i) Trouver μ pour les cas suivants $(x > 0)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= Ax^\alpha(a+bx^\beta) && \beta,\, a,\, b > 0 && (2)\\ f_2(x) &= B|\log(x)|^\gamma x^\delta(c+dx^\epsilon) && \gamma,\, \epsilon,\, c,\, d > 0 && (3)\\ f_3(x) &= C\exp(-Dx^{-\zeta}) && D,\, \zeta > 0 && (4)\end{aligned}$$

(ii) Si $\mu = 0$, l'exposant auxiliaire μ_s est défini comme suit : soit $f(x)$ telle que $f(x = 0^+) =$ constante, et $f', f'', \ldots$ les dérivées successives de f. Soit k l'ordre de la première dérivée qui diverge lorsque $x \to 0^+$, c.a.d.

$$f^{(m)}(x\to 0^+)\begin{cases} < \infty & \text{m<k,}\\ \to \infty & \text{m=k.}\end{cases} \tag{5}$$

Alors

$$\mu_s \equiv k + \lim_{x\to 0^+} \frac{\log|f^{(k)}(x)|}{\log x} \tag{6}$$

Trouver μ_s pour les cas ci-dessus où $\mu = 0$.

Exercice 2. Relation de fluctuation-dissipation

L'Hamiltonien du modèle d'Ising en dimension d quelconque peut s'écrire :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - h\sum_j S_j \tag{7}$$

où h est le champ extérieur, $S_j(=\pm 1)$ le spin au site j, et $\mathcal{H}_0$ l'Hamiltonien en champ nul :

$$\mathcal{H}_0 = -J\sum_{<i,j>} S_iS_j \tag{8}$$

la somme portant sur les plus proches voisins. La fonction de partition canonique Z est définie par :

$$Z = \mathrm{Tr}\,\exp(-\beta\mathcal{H}) \tag{9}$$

Soit m l'aimantation moyenne $m = \frac{1}{N}\sum_j\langle S_j\rangle = \langle S_j\rangle$. Montrer que la susceptibilité isotherme vaut :

$$\chi_T \equiv \left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_T\Big|_{h=0} = \beta\sum_k\left(\langle S_jS_k\rangle - \langle S_j\rangle^2\right) \tag{10}$$

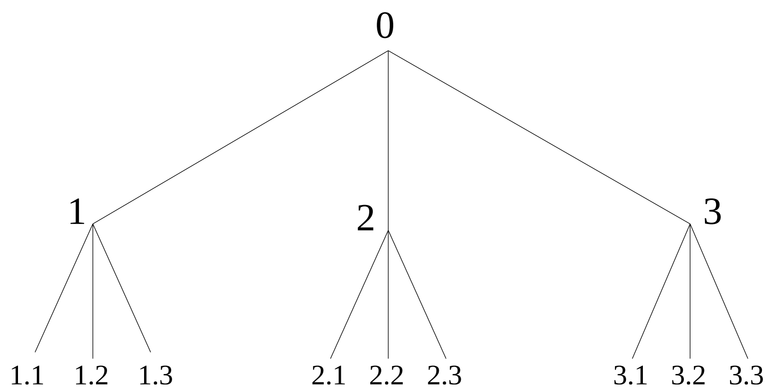
où j est un site quelconque, mais fixé. Cette équation reliant la susceptibilité à la corrélation est appelée *relation de fluctuation-dissipation*. Elle est importante à la fois d'un point de vue théorique, car elle permet de généraliser la notion de température à certains systèmes hors d'équilibre, et d'un point de vue expérimental car elle conduit notamment à des mesures précises de températures très basses.

Exercice 3. Modèle d'Ising sur un réseau en arbre

On considère un modèle d'Ising d'hamiltonien :

$$H = -J \sum_{<i,j>} s_i s_j \qquad J > 0 \tag{11}$$

(la somme porte sur les plus proches voisins) sur un réseau particulier, appelé un arbre de Cayley. L'arbre de Cayley est défini de la manière suivante : partant d'un site central "0", m branches se dirigent vers les sites "1", "2", ..., "m".
De chacun de ces nouveaux sites émergent à nouveau m nouvelles branches. Par construction, il n'y a pas de boucle fermée. Le processus est itéré à l'infini. La figure ci-dessous illustre le cas m=3 :



Calculer dans ce modèle :

(i) la fonction de partition canonique Z.

(ii) la densité d'énergie libre par site f.

(iii) la chaleur spécifique par site $c = -T\partial^2 f/\partial T^2$.